

Б. С. ПИЦКЕЛЬ, А. М. СТЕПИН

О СВОЙСТВЕ РАВНОРАСПРЕДЕЛЕННОСТИ ЭНТРОПИИ КОММУТАТИВНЫХ ГРУПП МЕТРИЧЕСКИХ АВТОМОРФИЗМОВ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 22 XII 1970)

В ⁽¹⁾ А. А. Кириллов сформулировал общую концепцию энтропии динамической системы с произвольным временем; в ⁽²⁾ энтропия счетной периодической группы преобразований пространства Лебега применяется к задаче классификации убывающих последовательностей измеримых разбиений. Энтропия характеризует «в среднем» скорость измельчения разбиения относительно группы преобразований. В настоящей заметке для каждого разбиения с конечной энтропией доказано существование почти всюду скорости измельчения такого разбиения относительно квазициклической группы преобразований. Полученный результат можно рассматривать как аналог индивидуальной эргодической теоремы теории информации (см. ⁽³⁾).

Пусть (X, μ) — пространство Лебега, G — фактор-группа группы двоично-рациональных чисел по решетке целых чисел, $T: g \rightarrow T_g$ — представление группы G в группу автоморфизмов пространства (X, μ) . Обозначим через G_n циклическую подгруппу в G порядка 2^n . Элемент разбиения P пространства X , содержащий точку $x \in X$, будем обозначать $C_P(x)$, а разбиение $\bigvee_{g \in G_n} T_g P$ обозначим P^n . Если энтропия $H(P)$ разбиения P конечна, то существует предел

$$h(T, P) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} H(P^n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X \left\{ -\frac{1}{2^n} \log \mu(C_{P^n}(x)) \right\} d\mu.$$

Теорема. Если представление T эргодично, $H(P) < \infty$, то почти всюду

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ -\frac{1}{2^n} \log \mu(C_{P^n}(x)) \right\} = h(T, P).$$

Доказательство. а) Если $f \in L^1(X, \mu)$, то существует такая инвариантная относительно преобразований $T_g, g \in G$, функция $\hat{f} \in L^1(X, \mu)$, что с вероятностью единица

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} \sum_{g \in G_n} f(T_g x) = \hat{f}(x),$$

причем $\int_X \hat{f} d\mu = \int_X f d\mu$. Это следует из свойства непрерывности условного математического ожидания относительно σ -алгебры (см. ⁽⁴⁾).

б) Пусть $(X \times K, \mu \times \lambda)$ — прямое произведение пространств Лебега (X, μ) и (K, λ) , где λ — нормированная мера Хаара на окружности K . Будем рассматривать K как группу вещественных чисел в полуинтервале $[0, 1)$ со сложением по модулю 1 и отождествим G с подгруппой двоично-рациональных чисел в K .

Для $\alpha \in K$, $0 < \alpha < 1$, положим

$$P(n, \alpha) = \bigvee_{g \in G_n \cap (0, \alpha]} T_g P, \quad G_n \cap (0, \alpha] \neq \emptyset.$$

В том случае, когда полуинтервал $(0, \alpha]$ не содержит ни одного элемента группы G_n , положим $P(n, \alpha) = v$, где v — минимальное разбиение пространства X . Определим функцию $f_n(x, \alpha)$ формулами

$$\begin{aligned} f_n(x, \alpha) &= -\log \mu(C_P(x) / C_{P(n, \alpha)}(x)) = \\ &= -\log \{[\mu(C_P(x) \cap C_{P(n, \alpha)}(x))] / [\mu(C_{P(n, \alpha)}(x))]\}, \end{aligned}$$

если $0 < \alpha < 1$, и

$$f_n(x, 0) = -\log \mu(C_P(x)).$$

Нетрудно проверить, что для любого $\alpha \in K$ справедливо равенство

$$-\log \mu(C_{P^n}(x)) = \sum_{g \in G_n} f_n(T_g x, \alpha + g).$$

Оно означает, что произведение по $g \in G_n$ условных мер

$$\mu(C_P(T_g x) / C_{P(n, \alpha+g)}(T_g x))$$

есть мера цилиндра $C_{P^n}(x)$.

в) Докажем, что для разбиения P с конечной энтропией

$$\int_{X \times K} [\sup_n f_n(x, \alpha)] d\mu d\lambda < c < \infty.$$

Для этого введем на X новую (уже неинвариантную относительно T_g) меру τ следующим образом (ср. (3)):

$$\tau(C_{P^n}(x)) = \mu(C_{P(n, 1-2^{-n})}(x)) \mu(C_P(x)).$$

Для этого, быть может, придется присоединить к пространству X множество точек, мера которого μ равна нулю. Мера τ σ -аддитивна на своей области определения и поэтому может быть продолжена до σ -аддитивной меры на σ -алгебре измеримых множеств. Введем функцию

$$\tilde{f}_n(x, \alpha) = -\log \{[\mu(C_{P \vee P(n, \alpha)}(x))] / [\tau(C_{P \vee P(n, \alpha)}(x))]\}.$$

Очевидно, что $f_n(x, \alpha) = \tilde{f}_n(x, \alpha) - \log \mu(C_P(x))$. Поскольку

$$\int_{X \times K} \{-\log \mu(C_P(x))\} d\mu d\lambda = H(P) < \infty,$$

то достаточно доказать, что

$$\int_{X \times K} [\sup_n \tilde{f}_n(x, \alpha)] d\mu d\lambda < c_1 < \infty.$$

Для фиксированных натуральных l и n положим

$$A_{n, l} = \{(x, \alpha) \in X \times K : \sup_{1 \leq i \leq n} \tilde{f}_i \leq l < f_n(x, \alpha)\}.$$

Если $(x, \alpha) \in A_{n, l}$, то

$$(\mu \times \lambda)(C_{P \vee P(n, \alpha)}(x)) < 2^{-l} (\tau \times \lambda)(C_{P \vee P(n, \alpha)}(x)).$$

Оценим $(\mu \times \lambda)$ — меру множества $A_l = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_{n, l}$:

$$\begin{aligned} (\mu \times \lambda)(A_l) &= \sum_{n=1}^{\infty} (\mu \times \lambda)(A_{n, l}) \leq 2^{-l} \sum_{n=1}^{\infty} (\tau \times \lambda)(A_{n, l}) \leq \\ &\leq 2^{-l} (\tau \times \lambda)(X \times K) = 2^{-l}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\int_{X \times K} [\sup_n \tilde{f}_n(x, \alpha)] d\mu d\lambda \leq \sum_{l=0}^{\infty} (l+1) 2^{-l} = c_1 < \infty.$$

г) По теореме Леви (см. (4)) почти всюду по мере $\mu \times \lambda$ существует предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{f}_n(x, \alpha) = f(x, \alpha)$. Из в) следует, что $f(x, \alpha) \in L^1(X \times K, \mu \times \lambda)$.

Пусть T — расширение представления T , действующее в $X \times K$ по формуле

$$T_g(x, \alpha) = (T_g x, \alpha + g), \quad \alpha \in K, g \in G, x \in X.$$

По эргодической теореме (пункт а)) почти всюду в $X \times K$ (по мере $\mu \times \lambda$) существует предел средних $\frac{1}{2^n} \sum_{g \in G_n} f(\tilde{T}_g(x, \alpha))$. Функции $F_N(x, \alpha) = \sup_{n \geq N} |f_n(x, \alpha) - f(x, \alpha)|$ сходятся к нулю почти всюду в $X \times K$ по мере $\mu \times \lambda$ и мажорируются функцией

$$f(x, \alpha) + \sup_n f_n(x, \alpha) \in L^1(X \times K, \mu \times \lambda),$$

поэтому

$$\int_{X \times K} F_N(x, \alpha) d\mu d\lambda \rightarrow 0 \text{ при } N \rightarrow \infty.$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{2^n} \sum_{g \in G_n} f_n(\tilde{T}_g(x, \alpha)) - \frac{1}{2^n} \sum_{g \in G_n} f(\tilde{T}_g(x, \alpha)) \right| \leq \\ & \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} \sum_{g \in G_n} F_N(\tilde{T}_g(x, \alpha)) = \int_{X \times K} F_N(x, \alpha) d\mu d\lambda \rightarrow 0 \text{ при } N \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Таким образом, для почти всех $(x, \alpha) \in X \times K$ доказано существование предела

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} \sum_{g \in G_n} f_n(T_g x, \alpha + g).$$

Поэтому найдется число $\tilde{\alpha} \in K$ такое, что для почти всех $x \in X$ существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} \sum_{g \in G_n} f_n(T_g x, \tilde{\alpha} + g) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ -\frac{1}{2^n} \log \mu(C_{P^n}(x)) \right\}. \quad (1)$$

Можно показать, что последовательность средних $\frac{1}{2^n} \sum_{g \in G_n} f_n(T_g x, \alpha + g)$

мажорируется функцией из $L^1(X \times K, \mu \times \lambda)$, поэтому

$$h(T, P) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X \left\{ -\frac{1}{2^n} \log \mu(C_{P^n}(x)) \right\} d\mu = \int_X \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ -\frac{1}{2^n} \log \mu(C_{P^n}(x)) \right\} d\mu.$$

Отсюда, ввиду эргодичности T и инвариантности предела (1) относительно преобразований $T_g, g \in G$, следует, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ -\frac{1}{2^n} \log \mu(C_{P^n}(x)) \right\} = h(T, P)$$

почти всюду. Теорема доказана.

В качестве следствия получаем формулу для энтропии действия T группы G

$$h(T) = \int_0^1 H(P/P_\alpha) d\lambda,$$

где P — образующее разбиение действия T , $H(P) < \infty$ и $H(P/P_\alpha)$ — средняя условная энтропия разбиения P относительно разбиения

$$\bigvee_{g \in \langle 0, \alpha \rangle} T_g P.$$

Отметим, что сходимость почти всюду последовательности функций

$$-\frac{1}{2^n} \log \mu(C_{P^n}(x)) \quad (2)$$

имеет место и для неэргодических действий. В этом случае пределом последовательности (2) является инвариантная функция $h(x) \in L^1(X, \mu)$, интеграл которой равен $h(T, P)$.

Свойство асимптотической равномерности энтропии эргодической группы преобразований справедливо также в случае k -мерной решетки Z^k .

По-видимому, свойством асимптотической равномерности энтропии обладают все эргодические динамические системы со счетным коммутативным «временем».

В заключение отметим, что известной формуле

$$h(T, P) = H(P/P^-), \quad H(P) < \infty,$$

для энтропии метрического автоморфизма T можно придать смысл в том случае, когда T — действие группы Z^k . Энтропия $h(T, P)$ действия T группы Z^k определяется как предел

$$\lim_{N \rightarrow \infty} [H(\bigvee_{|g| \leq N} T_g P)] / (2N)^k,$$

где $|g| = \max_{1 \leq i \leq k} |m_i|$, $g = (m_1, \dots, m_k) \in Z^k$.

В качестве P^- в этом случае надо взять $\bigvee_{g \in \mathcal{D}} T_g P$, где

$$\mathcal{D} = \bigcup_{i=1}^n \{(m_1, \dots, m_k) \in Z^k : m_1 = \dots = m_{i-1} = 0, m_i < 0\}.$$

Авторы выражают благодарность Я. Г. Синаю за полезное обсуждение этой заметки.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
11 XII 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ А. А. Кириллов, УМН, 22, в. 5, 67 (1967). ² А. М. Степин, Функциональный анализ, 5, в. 3, 113 (1971). ³ L. Breiman, Ann. Math. Statist., 28, 809 (1967). Поправка к статье в Ann. Math. Statist., 31, 809 (1960). ⁴ P. Levy, Theorie de l'addition des variables aleatoires, Paris, 1937. ⁵ A. Ionescu Tulcea, Arkiv math., 4, 1, 235 (1960).