Доклады Академии наук СССР
1971. Том 198, № 5

УДК 519.46 *МАТЕМАТИКА*

В. М. ПОЛЕЦКИХ, В. С. ЧАРИН

СЛОЙНО КОМПАКТНЫЕ ЛОКАЛЬНО НИЛЬПОТЕНТНЫЕ p-ГРУППЫ

(Представлено академиком В. М. Глушковым 24 XII 1970)

Периодические группы, у которых совокупность элементов любого фиксированного порядка является конечным подмножеством, называются слойно конечными группами. Такие группы детально изучены в работах С. Н. Черникова ([1, 2]).

В настоящей заметке делается попытка найти подходящий аналог понятия слойной конечности для групп топологических. Предлагается следующий вариант такого аналога, который оказывается достаточно содержательным для некоторых важных классов топологических групп.

Определение. Топологическая группа G называется слойно компактной, если полный прообраз $f_n^{-1}(K)$ любого компактного подмножества K группы G при отображении

$$f_n: x \to x^n \quad (x \in G)$$

для каждого натурального числа $n = 1, 2, \ldots$ является подмножеством компактным.

Очевидно, что если группа G — дискретная периодическая группа, то условие слойной компактности автоматически обращается в условие слойной конечности в смысле С. Н. Черникова.

Слойно компактной является всякая дискретная группа с однозначной извлекаемостью корня. В частности, всякая дискретная абелева группа без элементов конечного порядка слойно компактна. Если же топологическая группа недискретна, то даже будучи абелевой и без элементов конечного порядка она не обязательно слойно компактна. Приведем простой пример, показывающий справедливость этого утверждения.

Пусть $G_1, G_2, \ldots, G_n, \ldots$ — бесконечная последовательность групп, каждая из которых изоморфна аддитивной группе поля p-адических чисел (короче говоря, групп типа R_p, где p — простое число). Выделим в каждой из групп G_n этой последовательности подгруппу K_n, изоморфную аддитивной группе кольца целых p-адических чисел. Составим прямое произведение G всех групп G_n с отмеченными в них открытыми компактными подгруппами K_n (определение такого произведения принадлежит Н. Я. Виленкину ([4])). В построенной группе G нет элементов конечного порядка, и подгруппа K, равная топологическому прямому произведению подгрупп K_n, $n = 1, 2, 3, \ldots$, является открытой компактной подгруппой в ней. Полный прообраз $L = f_p^{-1}(K)$ подгруппы при отображении $f_p: x \to x^p$ имеет фактор-группу L / K, разложимую в алгебраическое прямое произведение бесконечного множества циклических групп простого порядка p. Поэтому L не является компактным подмножеством. Значит, группа G не обладает свойством слойной компактности.

Можно показать, что прямое произведение с отмеченными открытыми компактными подгруппами групп типа R_p будет слойно компактной группой тогда и только тогда, когда число прямых множителей в этом произведении конечно. Этот тип слойно компактных групп охватывается одной теоремой, сформулированной ниже.

Сначала отметим некоторые общие свойства слойно компактных групп.

1. *Если локально компактная группа G есть расширение компактной группы с помощью слойно компактной группы, то G — слойно компактная группа. Фактор-группа локально компактной слойно компактной группы по ее компактной инвариантной подгруппе — слойно компактная группа.*

2. *Пусть G — локально компактная, но не компактная, слойно компактная p-группа.*

Тогда группа G содержит либо дискретную подгруппу типа p^{∞}, либо подгруппу типа R_p.

Последнее предложение является обобщением леммы 1.1 из ([1]).

Здесь всюду p-группа понимается в топологическом смысле: группа G называется *p*-группой, если для каждого элемента g из G имеет место сходимость $g^{p^n} \to 1$ при $n \to \infty$.

Свойства слойно компактных групп оказываются тесно связанными со свойствами топологических групп конечного специального ранга (для дискретных групп понятие специального ранга введено А. И. Мальцевым ([3])). Кроме известных уже результатов ([5], [6]), здесь существенно используются новые предложения о группах конечного ранга (слово «специальный» далее опускается).

Теорема 1. *Пусть G — локально компактная локально нильпотентная p-группа без элементов конечного порядка. Для нее верны следующие предложения:*

1) *изолятор замкнутой подгруппы H конечного ранга в G является замкнутой подгруппой того же ранга, подгруппа H открыта в своем изоляторе;*

2) *конечное число замкнутых подгрупп конечного ранга порождает подгруппу конечного ранга.*

Теорема 2. *Пусть G — локально компактная локально нильпотентная p-группа без элементов конечного порядка. Она тогда и только тогда будет группой конечного ранга, когда в ней найдется такая открытая подгруппа H, что подгруппа H^p, алгебраически порожденная степенями h^p всех элементов h из H, открыта в подгруппе H.*

При доказательстве этой теоремы используется

Лемма. *Пусть H — компактная нильпотентная p-группа без элементов конечного порядка. Если индекс $[H: H^p]$ конечен и равен p^s, то H — группа конечного ранга и ранг ее не превосходит числа s.*

Теорема 3. *Пусть группа G удовлетворяет условиям предыдущей теоремы и пусть, кроме того, замыкание $\overline{G^p}$ подгруппы G^p совпадает с группой G. Группа G тогда и только тогда имеет конечный ранг, когда для любой ее замкнутой погруппы H из равенства $\overline{H^p}$ следует равенство $H^p = H$.*

С помощью всех этих предложений можно доказать теорему.

Теорема 4. *Пусть G — локально компактная локально нильпотентная p-группа без элементов конечного порядка.*

Если группа G слойно компактна, то все факторы любого ее нормального ряда замкнутых подгрупп слойно компактны.

Обратно, если группа G обладает нормальным рядом замкнутых подгрупп со слойно компактными факторами, то и сама группа G слойно компактна.

Строение групп рассматриваемого класса дается следующей теоремой.

Теорема 5. *Пусть G — локально компактная локально нильпотентная p-группа без элементов конечного порядка.*

Если группа G слойно компактна, то она обладает замкнутой инвариантной подгруппой H конечного ранга, фактор-группа G/H по которой компактна; подгруппа H обладает центральным рядом

$$1 = H_0 \subset H_1 \subset \ldots \subset H_i \subset H_{i+1} \subset \ldots \subset H_n = H$$

конечной длины, все факторы H_{i+1}/H_i которого изоморфны аддитивной группе поля p-адических чисел (т. е. типа R_p).

Обратно, если группа G обладает подгруппой H с такими свойствами, то G — слойно компактная группа.

В частности, если G — локально компактная абелева p-группа без элементов конечного порядка, то она слойно компактна тогда и только тогда, когда она разлагается в прямое произведение

$$G = G_1 \times G_2 \times \ldots \times G_n \times K$$

конечного числа подгрупп, из которых G_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ изоморфны группам типа R_p, а K — компактная группа.

Последняя теорема доказывается с помощью предыдущих предложений и теоремы 7 из работы ([6]).

Поступило
17 XII 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. Н. Черников, Матем. сборн., 22 (64), 1, 101 (1948). [2] С. Н. Черников, Математич. сборн., 45 (87), 3, 415 (1958). [3] А. И. Мальцев, Математич. сборн., 22 (64), 2, 351 (1948). [4] Н. Я. Виленкин, Математич. сборн., 19 (61), 85 (1946). [5] В. С. Чарин, Украинск. матем. журн., 16, № 2, 212 (1964). [6] В. С. Чарин, Укр. матем. журн., 18, № 3, 85 (1966).