Доклады Академии наук СССР
1971. Том 201, № 4

УДК 513.882

МАТЕМАТИКА

В. С. ВИНОГРАДОВ

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ПЕРВОГО ПОРЯДКА НА ПЛОСКОСТИ

(Представлено академиком В. С. Владимировым 10 V 1971)

Метод, который предлагается в данной работе, позволяет исследовать граничную задачу для эллиптической системы первого порядка на плоскости, когда коэффициенты при производных непрерывны внутри рассматриваемой области, а их сужения на границу удовлетворяют условию Гёльдера с показателем, большим $^1/_2$; для остальных коэффициентов предполагается принадлежность к L_p при $p > 2$. Суть метода состоит в том, что граничная задача эквивалентным образом приводится к решению двумерного сингулярного интегрального уравнения в некотором подпространстве пространства L_p, правая часть которого содержит произвольные параметры, характеризующие пространство решений некоторой специальной однородной задачи для неоднородной системы Коши — Римана. Идея этого метода восходит к работам И. Н. Векуа ([1-3]), где исследовалась задача Дирихле для одного уравнения эллиптического типа и задача отыскания гомеоморфизмов системы Бельтрами, когда коэффициенты при производных лишь измеримые и ограниченные функции. Интегральное уравнение, получаемое в этом случае, исследуется во всем L_p, а его сингулярная часть имеет обращение. В сформулированном выше виде этот метод был применен автором при исследовании задачи Римана — Гильберта для эллиптической системы первого порядка, состоящей из двух уравнений ([4]). В полученном здесь интегральном уравнении удавалось подправить сингулярную часть вполне непрерывным оператором так, чтобы она имела обращение. Непосредственным образом на общие эллиптические системы с числом уравнений, большим двух, этот метод не переносится. В ([5-7]) граничная задача была исследована для систем обобщенного аналитического вектора. Используя специальное преобразование искомого вектора, автором в ([8], [9]) граничная задача для общей эллиптической системы сведена к сингулярному интегральному уравнению, которое в случае нётеровости задачи имеет нулевой индекс; причем, в этом случае от коэффициентов при производных требовалось существование ограниченной производной. В настоящей работе мы ослабим это ограничение до непрерывности, существенно используя результаты ([8]). Требование от них гёльдеровской непрерывности на границе исходит от метода, а не от сути задачи.

Другим методом граничную задачу для общей эллиптической системы исследовал А. И. Вольперт ([10]), предполагая, что коэффициенты при производных дифференцируемы и их производные удовлетворяют условию Гёльдера, остальные же коэффициенты удовлетворяют условию Гёльдера.

Итак, рассмотрим следующую задачу: найти решения в области D эллиптической системы

$$\left(E\frac{\partial}{\partial x} + A\frac{\partial}{\partial y} + B\right)\mathbf{u} = \mathbf{F}, \tag{1}$$

удовлетворяющие на границе Γ условию

$$G\mathbf{u} = \varphi. \tag{2}$$

Здесь E — единичная, A и B — квадратные матрицы порядка $2n$, $\mathbf{F}$ — вектор-функция размерности $2n$.

$$A \in C(D), \quad A|_\Gamma \in H^\nu(\Gamma), \quad \nu > {}^1/_2; \quad B, \ \mathbf{F} \in L_p(D), \ p > 2. \tag{3}$$

Область D будем предполагать конечной, односвязной и с гладкой границей; конформным преобразованием ее всегда можно свести к случаю единичного круга $|z| < 1$, при этом условия (3) сохраняются. Поэтому в дальнейшем будем считать, что область D есть единичный круг. G — прямоугольная матрица размеров $n \times 2n$, φ — вектор-функция размерности n, их элементы определены на границе области D и удовлетворяют условию Гёльдера с показателем, большим ${}^1/_2$.

Ввиду эллиптичности системы (1) характеристические корни матрицы A не лежат на вещественной оси и ввиду ее вещественности распределены поровну в верхней и нижней полуплоскостях.

Лемма 1. *Имеет место глобальное разложение в* D:

$$A = T_0 \widetilde{\Lambda} T_0^{-1}, \tag{4}$$

где матрицы T_0, $\widetilde{\Lambda}$ *обладают той же гладкостью, что и матрица* A, *и имеют клеточное строение,*

$$T_0 = (T_1^0 \overline{T}_1^0), \qquad \widetilde{\Lambda} = \begin{pmatrix} \Lambda & 0 \\ 0 & \overline{\Lambda} \end{pmatrix}, \tag{5}$$

причем характеристические корни матрицы Λ *лежат в верхней полуплоскости (черта сверху обозначает комплексное сопряжение).*

Доказательство. Существование этого разложения следует из теоремы об эквивалентности косого произведения прямому над стягиваемой областью ([11]). Элементарное доказательство этой леммы с указанием метода построения матриц приведено в ([9]).

Лемма 2. *Любую функцию* $f(x, y)$, *непрерывную в круге* $|z| \leqslant 1$ *и удовлетворяющую на его границе условию Гёльдера с показателем* $\alpha > {}^1/_2$, *можно приблизить в метрике пространства* $C(|z| \leqslant 1)$ *с любой степенью точности функцией из* $W_p^{(1)}$ *при некотором* $p > 2$ *с теми же граничными значениями.*

Доказательство проводится по следующей схеме:

а) решаем задачу Дирихле $\Delta\Phi_1 = 0$, $\Phi_1|_\Gamma = f|_\Gamma$ и выбираем кольцо $r_1 \leqslant r \leqslant 1$ так, чтобы в нем $|\Phi_1 - f| < \varepsilon/4$;

б) в круге $0 \leqslant r \leqslant r_1$ по теореме Вейерштрасса приближаем f полиномом Φ_2: $|\Phi_2 - f| < \varepsilon/4$;

в) рассмотрим функцию

$$\Phi = \begin{cases} \Phi_1, & r_1 \leqslant r \leqslant 1, \\ \Phi_2, & 0 \leqslant r < r_1. \end{cases}$$

В достаточно тонком кольце $r_1 - \delta < r < r + \delta$ ее можно сгладить линейчатым образом так, чтобы получаемая в итоге функция принадлежала $W_p^{(1)}$ при $p > 2$ и приближала f в C с точностью до ε.

Используя эту лемму, приведем задачи (1), (2) к задаче, «близкой» в некотором смысле специальной задаче, рассмотренной в ([8]). А именно, из нее следует, что матрицу T_0 (из леммы 1) можно приблизить неособой матрицей $T \in W_p^{(1)}$, $T|_\Gamma = T_0|_\Gamma$ такого же клеточного строения $(T_1\overline{T}_1)$ в метрике C с точностью до ε. Сделаем преобразование $\mathbf{u} = T\widetilde{\mathbf{w}}$, где $\widetilde{\boldsymbol{w}} = \begin{pmatrix} w \\ \overline{w} \end{pmatrix}$, тогда наша задача запишется в виде

$$\left(E \frac{\partial}{\partial x} + T^{-1} A T \frac{\partial}{\partial y} + B_1 \right) \widetilde{w} = F_1; \tag{6}$$

$$\operatorname{Re} (G T_1^0 \mathbf{w}) |_\Gamma = \varphi. \tag{7}$$

Пусть

$$\det GT_1^0 \neq 0 \quad \text{на} \quad \Gamma. \tag{8}$$

Факторизуем эту матрицу ([12–14]) в виде

$$GT_1^0 = e^{\Phi_1^-} \ldots e^{\Phi_k^-} \tau e^{\Phi_1^+} \ldots e^{\Phi_l^+}, \tag{9}$$

где $\tau = \operatorname{diag}\{t^{\varkappa_1}, \ldots, t^{\varkappa_n}\}$ — диагональная матрица, $\varkappa_\alpha$ — целые числа (частные индексы), Φ_α^+ (Φ_α^-) — матрицы, являющиеся граничными значениями голоморфных матриц-функций внутри (вне) D; e^Φ — экспоненциал матрицы Φ. Факторизацию (9) можно записать в виде

$$\tau \prod_1^k e^{\tau^{-1}\Phi_\alpha^- \tau} \prod_1^l e^{\Phi_\beta^+} = \tau(t) S(t).$$

Матрица $S(t)$ продолжается внутрь D неособой матрицей $S(z)$ из $W_p^{(1)}$, $p > 2$; произведя замену

$$\widetilde{\mathbf{w}}_1 = \begin{pmatrix} \overline{S} & \\ & S \end{pmatrix} \widetilde{\mathbf{w}},$$

мы приведем граничное условие к виду

$$\operatorname{Re} \tau \mathbf{w}_1 = \varphi. \tag{10}$$

Это условие легко приводится к однородному, поэтому в дальнейшем будем считать $\varphi \equiv 0$.

В системе (6) первые n уравнений получаются комплексным сопряжением от n последующих, поэтому можно ограничиться рассмотрением n первых, которые будут иметь вид

$$E\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x} + \Lambda \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial y} + A_{1\varepsilon}\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial y} + A_{2\varepsilon}\frac{\partial \overline{\mathbf{w}}}{\partial y} + B_1 \mathbf{w} + B_2 \overline{\mathbf{w}} = \mathbf{F}_1^0;$$

причем нормы элементов матриц $A_{1\varepsilon}$ и $A_{2\varepsilon}$ можно сделать сколь угодно малыми по норме в пространстве $C(D)$, если матрицу T взять из достаточно малой окрестности T_0 в том же пространстве. Перейдя в этой системе к w_1 и используя формальные производные

$$\frac{\partial}{\partial \bar z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right), \qquad \frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right),$$

получим уравнения

$$E\frac{\partial \mathbf{w}_1}{\partial \bar z} + Q\frac{\partial \mathbf{w}_1}{\partial z} + \widetilde{A}_{1\varepsilon}\frac{\partial \mathbf{w}_1}{\partial y} + \widetilde{A}_{2\varepsilon}\frac{\partial \overline{\mathbf{w}_1}}{\partial y} + \widetilde{B}_1 \mathbf{w}_1 + \widetilde{B}_2 \overline{w}_1 = \widetilde{F}_1, \tag{11}$$

причем собственные числа матрицы Q лежат внутри единичного круга.

Полученная граничная задача (10), (11) приводится к двумерному сингулярному интегральному уравнению. В самом деле, для функций из $W_p^{(1)}(D)$, $p > 2$, удовлетворяющих однородному граничному условию (10), имеем представление ([4, 8])

$$w_1 = H\rho + \mathbf{P}(z), \quad \rho = \partial \mathbf{w} / \partial \bar z \in L_p, \tag{12}$$

$H\rho$ — интегральный оператор, действующий покомпонентно следующим образом:

$$H_\alpha \rho = -\frac{1}{\pi}\iint\limits_D \left[\frac{\rho_\alpha(\zeta)}{\zeta - z} + \frac{\zeta^{2\varkappa_\alpha - 1}\overline{\rho_\alpha(\zeta)}}{1 - z\bar\zeta}\right] dv_\zeta \quad \text{при } \varkappa_\alpha > 0; \tag{13}$$

$$H_\alpha \rho = -\frac{1}{\pi}\iint\limits_D \left[\frac{\rho_\alpha(\zeta)}{\zeta - z} + \frac{z^{2|\varkappa_\alpha| + 1}\overline{\rho_\alpha(\zeta)}}{1 - z\bar\zeta}\right] dv_\zeta \quad \text{при } \varkappa_\alpha \leqslant 0, \tag{14}$$

$\mathbf{P}(z)$ — полиномиальный вектор с компонентами $p_\alpha(z)=0$ при $\varkappa_\alpha>0$, а при $\varkappa_{\alpha 1}\leqslant 0$ p_α — полином степени $2|\varkappa_\alpha|$, коэффициенты которого зависят линейно от $2|\varkappa_\alpha|+1$ действительных параметров (см. ([4], [5]).

Вектор $\rho(\zeta)$ должен принадлежать подпространству L_p коразмерности $\sum\limits_{\varkappa_\alpha>0}'(2\varkappa_\alpha-1)$, определенному условиями лишь для $\varkappa_\alpha>0$:

$$\varphi_{\alpha\beta}=\mathrm{Re}\left\{\iint\limits_D[\zeta^{\varkappa_\alpha-\beta-1}+\zeta^{\varkappa_\alpha+\beta-1}]\,\rho_\alpha(\zeta)\,dv_\zeta\right\}=0,\beta=0,1,\ldots,\varkappa_\alpha-1:$$

$$\varphi_{\alpha\beta}=\mathrm{Im}\left\{\iint\limits_D[i\zeta^{\varkappa_\alpha-\beta-1}-i\zeta^{\varkappa_\alpha+\beta-1}]\,\rho_\alpha(\zeta)\,dv_\zeta\right\}=0,\quad\beta=-1,\ldots,-\varkappa_\alpha-1. \tag{15}$$

Подставив (12) в (11), получим сингулярное интегральное уравнение с сингулярной частью

$$\rho+Q\Pi\rho+A_{1\varepsilon}\Pi_y\rho+A_{2\varepsilon}\overline{\Pi}_y\rho, \tag{16}$$

где $\Pi\rho=\dfrac{\partial}{\partial z}H_\rho$, $\Pi_y\rho=\dfrac{\partial}{\partial y}H\rho$.

В ([3]) показано, что при наших предположениях относительно Q

$$\rho+Q\Pi\rho$$

всегда имеет регуляризатор и индекс его равен нулю. Поскольку в силу леммы 2 норму оператора $\tilde{A}_{1\varepsilon}\Pi\rho+\tilde{A}_{2\varepsilon}\overline{\Pi}\rho$ можно сделать сколь угодно малой подходящим выбором преобразования T, при этом выборе ни матрица Q, ни τ не изменяются, то оператор (16) тоже будет иметь регуляризатор (15). Отсюда таким же образом, как и в (8), получается

Теорема. *Если* $\det GT_1^0|_\Gamma\neq 0$, *то граничная задача нётерова и ее индекс равен* $n-2\varkappa$, *где* $\varkappa=\dfrac{1}{2\pi}\Delta|_\Gamma\arg\det GT_1^0$.

Математический институт им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР
Москва

Поступило
5 V 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] И. Н. Векуа, ДАН, **101**, № 4, 593 (1955). [2] И. Н. Векуа, ДАН, **100**, № 2, 197 (1955). [3] И. Н. Векуа, Обобщенные аналитические функции, 1959. [4] В. С. Виноградов, ДАН, **118**, № 6, 1059 (1958). [5] Б. Боярский, ДАН, **122**, № 4 (1958). [6] Б. Боярский, ДАН, **124**, № 1 (1959). [7] Б. Боярский, Ann. Polonici Mathematici, **17**, 1966, p. 281. [8] В. С. Виноградов, Дифференциальные уравнения, **7**, № 7 (1971). [9] В. С. Виноградов, Дифференциальные уравнения, **7**, № 8 (1971). [10] А. И. Вольперт, Тр. Московск. матем. общ., **10**, 41 (1961). [11] М. Атья, Лекции по K-теории, 1967. [12] Б. Боярский, Сообщ. АН Груз. ССР, **21**, № 3, 263 (1958). [13] И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн, УМН, **13**, в. 2, 3 (1958). [14] Н. П. Векуа, Системы сингулярных интегральных уравнений, 1970. [15] Ф. В. Аткинсон, Матем. сборн., **28** (70), в. 1, 3 (1951).