Доклады Академии наук СССР
1971. Том 201, № 4

УДК 517,948+513.88:518 — *МАТЕМАТИКА*

А. М. ДЕМЕНТЬЕВА

О РАЗНОСТНЫХ МЕТОДАХ ПОСТРОЕНИЯ НЕЯВНОЙ ФУНКЦИИ

(Представлено академиком И. Н. Векуа 13 V 1971)

1. Пусть неявная функция $x = x^*(t)$ определена уравнением

$$f(x;\ t) = 0. \tag{1}$$

Здесь x — точка некоторого полного нормированного пространства E; t — скалярный параметр (время); $f(x; t)$ — достаточно гладкий оператор со значениями в E.

Допустим, что нам известно приближенное или точное значение x_0 неявной функции при $t = 0$, и пусть требуется отыскать достаточно хорошие приближения значений $x^*(t)$ при некотором большом значении t или при значениях t из некоторого большого промежутка. В одной из основных схем ([1]) построения неявных функций выбирается некоторая последовательность значений времени t_i ($t_0 = 0$; $t_{i+1} > t_i$), а затем для отыскания каждого приближенного значения x_i вектора $x^*(t_i)$ приближенно решается каким-либо способом уравнение $f(x; t_i) = 0$, причем для этого приближенного решения вектор x_{i-1} рассматривается как начальное приближение. При применениях таких схем нужно знать, насколько малы должны быть разности $t_i - t_{i-1}$ и насколько точно нужно решать уравнения $f(x; t_i) = 0$, чтобы «не потерять» неявную функцию (чтобы знать оценку разностей $x_i - x^*(t_i)$ при всех i).

В этой статье будем считать, что $t_i = ih$ ($i = 1, 2, \ldots$). В статье решается задача об оценке значений шага h, при котором можно строить неявную функцию с заданной точностью r, если для приближенного решения уравнений $f(x; t_i) = 0$ при всех i применяется один и тот же метод.

Метод построения последовательности x_i назовем $[r_1, r_2]$-*устойчивым*, где $r_1 \leqslant r_2$, если он обладает следующими свойствами:

1°. Из $r_1 \leqslant \|x_0 - x^*(0)\| \leqslant r_2$ вытекает, что $\|x_i - x^*(t_i)\| \leqslant \|x_0 - x^*(0)\|$ при всех $i = 1, 2, \ldots$

2°. Из $\|x_0 - x^*(0)\| < r_2$ вытекает, что

$$\varlimsup_{i\to\infty} \|x_i - x^*(t_i)\| \leqslant r_1,$$

а из $r_1 < \|x_i - x^*(t_i)\| < r_2$ вытекает, что $\|x_{i+1} - x^*(t_{i+1})\| < \|x_i - x^*(t_i)\|$.

3°. При каждом i точка x_i входит в область притяжения ([2]) построенного методом Ньютона — Канторовича решения $x^*(t_i)$ уравнения $f(x; t_i) = 0$.

Ниже предполагается, что при всех рассматриваемых значениях аргументов линейные операторы $f_x'(x; t)$ имеют непрерывные обратные. Пусть справедливы оценки

$$\|[f_x'(x;\ t)]^{-1}\| \leqslant N, \quad \|f_x'(x;\ t)\| \leqslant M_1, \quad \|f_t'(x;\ t)\| \leqslant M_2,$$

$$\|f_x'(x;\ t) - f_x'(y;\ t)\| \leqslant M_{11}\|x - y\|,$$

$$\|f_x'(x;\ t) - f_x'(x;\ s)\| \leqslant M_{12}|t - s|.$$

2. Рассмотрим вначале обычную [1, 2] модификацию метода Ньютона — Канторовича. Будем считать известной оценку ошибки вычислений. Тогда

$$x_i = x_{i-1} - [f'_x(x_{i-1};\, t_i)]^{-1} f(x_{i-1};\, t_i) + \xi_i \quad (i = 1, 2, \ldots), \tag{2}$$

где ξ_i — случайный вектор, удовлетворяющий оценке

$$\|\xi_i\| \leqslant \alpha. \tag{3}$$

Теорема 1. *Пусть*

$$2NM_{11}\alpha < 1. \tag{4}$$

Тогда при каждом h, удовлетворяющем неравенствам

$$0 < 2N^2M_{11}M_2h \leqslant 1 - 2NM_{11}\alpha, \tag{5}$$

метод (2) *будет* $[r_1(h), r_2(h)]$-*устойчив, где*

$$r_1(h) = 1/(NM_{11}) - NM_2h - \sqrt{1/(N^2M_{11}^2) - 2M_2h/M_{11} - 2\alpha/(NM_{11})}, \tag{6}$$

$$r_2(h) = 1/(NM_{11}) - NM_2h + \sqrt{1/(N^2M_{11}^2) - 2M_2h/M_{11} - 2\alpha/(NM_{11})}. \tag{7}$$

Теорема 2. *Пусть выполнено условие* (4) *и пусть числа r_1, r_2 удовлетворяют неравенствам*

$$2\alpha \,/\, (1 + \sqrt{1 - 2\alpha NM_{11}}) < r_1 \leqslant r_2 < (1 + \sqrt{1 - 2\alpha NM_{11}}) \,/\, NM_{11}. \tag{8}$$

Тогда при

$$h \leqslant \frac{1}{NM_2} \min\left\{\sqrt{\frac{2(r_1 - \alpha)}{NM_{11}}} - r_1, \quad \sqrt{\frac{2(r_2 - \alpha)}{NM_{11}}} - r_2\right\} \tag{9}$$

метод (2) *будет* $[r_1, r_2]$-*устойчивым.*

3. В случаях, когда t — реальное время и когда отыскание векторов $f(x;\, t)$ и операторов $f_x'(x;\, t)$ может быть выполнено лишь после момента t, естественно видоизменить метод так, чтобы при отыскании вектора x_i возможно меньше использовалась информация о $f(x;\, t)$ при $t = t_i$. Рассмотрим в связи с этим близкий к (2) метод

$$x_i = x_{i-1} - [f'_x(x_{i-1};\, t_{i-1})]^{-1} f(x_{i-1};\, t_i) + \xi_i \quad (i = 1, 2, \ldots), \tag{10}$$

где ξ_i снова удовлетворяет (3).

Теорема 3. *Пусть выполнено условие* (4).

Тогда при каждом h, удовлетворяющем неравенствам $0 < h < h^*$, где h^* — меньший из двух положительных корней уравнения

$$(1 - NM_{12}h)^2 = 2NM_{11}(\alpha + NM_2h), \tag{11}$$

метод (10) *будет* $[r_1(h),\, r_2(h)]$-*устойчивым, где $r_1(h)$ и $r_2(h)$ — положительные корни уравнения*

$$\frac{NM_{11}}{2}(r + NM_2h)^2 + NM_{12}h\,(r + NM_2h) + \alpha - r = 0. \tag{12}$$

Теорема 4. *Пусть выполнено условие* (4) *и пусть числа r_1 и r_2 удовлетворяют неравенствам* (8).

Тогда при

$$h \leqslant \min\{h_1^*, h_2^*\}, \tag{13}$$

где h_j^* $(j = 1, 2)$ — положительный корень уравнения

$${}^1\!/_2 NM_{11}(r_j + NM_2h)^2 + NM_{12}h(r_j + NM_2h) + \alpha - r_j = 0, \tag{14}$$

метод (10) *будет* $[r_1, r_2]$-*устойчивым.*

4. Для построения последовательности приближенных значений x_i неявной функции можно применить метод, основанный на применении двух шагов процесса Ньютона — Канторовича. Если пренебречь случайными ошибками, то построение последовательности x_i будет идти по формулам

$$z_i = x_{i-1} - [f'_x(x_{i-1};\ t_i)]^{-1} f(x_{i-1};\ t_i), \tag{15}$$

$$x_i = z_i - [f'_x(z_i;\ t_i)]^{-1} f(z_i;\ t_i). \tag{16}$$

Если шаг h удовлетворяет неравенствам

$$0 < 4N^2 M_2 M_{11} h \leqslant 3\sqrt[3]{2}, \tag{17}$$

то уравнение

$$NM_{11}(NM_{11}r^2 + 2NM_2h)^2 - 8r = 0 \tag{18}$$

имеет два положительных корня (они совпадают, если $4N^2M_2M_{11}h = 3\sqrt[3]{2}$). Обозначим эти корни через $\rho_1(h)$ и $\rho_2(h)$.

Теорема 5. *Пусть h удовлетворяет неравенствам* (17).

Тогда метод (15), (16) *будет* $[\rho_1(h),\ \rho_2(h)]$*-устойчивым.*

Теорема 6. *Пусть* $0 < r_1 \leqslant r_2 < 2/(NM_{11})$.

Тогда при

$$h \leqslant \frac{1}{NM_2} \min\left\{\sqrt{\frac{2r_1}{NM_{11}}} - \frac{NM_{11}}{2} r_1^2,\quad \sqrt{\frac{2r_2}{NM_{11}}} - \frac{NM_{11}}{2} r_2^2\right\} \tag{19}$$

метод (15), (16) *будет* $[r_1,\ r_2]$*-устойчивым.*

Для перехода от вектора x_{i-1} к вектору x_i по методу (15), (16) нужно провести вычисления такой же трудности, как при вычислении двух последовательных векторов в методе (2) (при $\alpha = 0$). Если при шаге h_0 теорема 6 гарантирует $[r_1,\ r_2]$-устойчивость метода (15), (16), то, как легко видеть, теорема 2 гарантирует $[r_1,\ r_2]$-устойчивость метода (2) при шаге, большем, чем $\frac{1}{2}h_0$.

5. В этом пункте рассматриваются уравнения (1) в гильбертовом пространстве. Для построения последовательностей x_i можно использовать различные модификации метода скорейшего спуска, метода минимальных невязок и т. д. (см. ([1, 2])). Здесь рассматривается следующий метод:

$$x_i = x_{i-1} - \frac{\| f(x_{i-1};\ t_i)\|^2}{\| [f'_x(x_{i-1};\ t_i)]^* f(x_{i-1};\ t_i)\|^2} [f'_x(x_{i-1};\ t_i)]^* f(x_{i-1};\ t_i) + \xi_i, \tag{20}$$

где случайные ошибки ξ_i удовлетворяют (3).

Будем пользоваться обозначением

$$q = (NM_1 - 1)/(NM_1 + 1). \tag{21}$$

Предположим, что

$$\alpha < (1-q)^2 / (2(1+q)NM_{11}); \tag{22}$$

тогда у квадратного относительно γ уравнения

$$q(\tfrac{1}{2}NM_{11}\varkappa^2 + \varkappa + \gamma) + \tfrac{1}{2}NM_{11}(\varkappa + \gamma)^2 + \alpha - \varkappa = 0, \tag{23}$$

$$\varkappa = (1 - q - NM_{11}\gamma) / ((1+q)NM_{11}), \tag{24}$$

есть два положительных корня. Меньший из них обозначим через $\gamma^*(\alpha)$.

Теорема 7. *Пусть выполнено условие* (22) *и пусть* $0 < NM_2h \leqslant \gamma_*(\alpha)$.

Тогда метод (20) *будет* $[r_1(h),\ r_2(h)]$*-устойчивым, где* $r_1(h)$ *и* $r_2(h)$ — *корни уравнения*

$$NM_{11}(r + NM_2h)^2 + 2q(r + NM_2h) + qNM_{11}r^2 - 2r + 2\alpha = 0. \tag{25}$$

Теорема 8. *Пусть выполнено условие* (22) *и пусть числа* r_1, r_2 *удовлетворяют неравенствам* $r_1^* < r_1 \leqslant r_2 < r_2^*$, *где* r_1^* *и* r_2^* — *корни уравнения*

$$(1+q)NM_{11}r^2 - 2(1-q)r + 2\alpha = 0. \tag{26}$$

Тогда при

$$0 < N^2M_2M_{11}h \leqslant$$

$$\leqslant -q + \min_{j=1,2}\left\{\sqrt{q^2 - NM_{11}(qNM_{11}r_j^2 + 2\alpha - 2r_j)} - NM_{11}r_j\right\} \tag{27}$$

метод (20) *будет* $[r_1, r_2]$-*устойчивым*.

Тартуский государственный университет

Поступило
13 V 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] М. А. Красносельский, Г. М. Вайникко и др., Приближенное решение операторных уравнений, «Наука», 1968. [2] Л. В. Канторович, Г. П. Акилов, Функциональный анализ в нормированных пространствах, 1959.