

В. С. МАШКЕВИЧ

УНИВЕРСАЛЬНОЕ СООТНОШЕНИЕ МЕЖДУ ВЕРОЯТНОСТЯМИ ИЗЛУЧЕНИЯ И ПОГЛОЩЕНИЯ ПРИ КВАЗИРАВНОВЕСИИ

(Представлено академиком А. М. Прохоровым 15 VII 1970)

1. Общеизвестно эйнштейновское универсальное соотношение между вероятностями излучения и поглощения при термодинамически равновесном состоянии вещества

$$B_e(\omega; \theta)/B_a(\omega; \theta) = \Phi(\omega; \theta) \equiv e^{-\frac{\hbar\omega}{\theta}}.$$

Здесь B_a , B_e — вероятности поглощения и спонтанного излучения фотона частоты ω ; θ — температура в энергетических единицах.

Универсальность функции Φ есть следствие условия равновесия тел, взаимодействующих через поле излучения; явный вид Φ — следствие бозевского распределения для фотонов.

2. Гораздо более общим является случай квазиравновесного состояния вещества. С ним часто приходится сталкиваться в задачах о взаимодействии излучения с веществом. Используем определение квазиравновесия, основанное на концепции элементарных возбуждений.

Пусть в веществе имеются элементарные возбуждения нескольких сортов. Обозначим $\mathcal{M}_i$ среднее (в статистическом смысле) значение числа возбуждений i -го сорта. Квазиравновесным называется такое состояние вещества, в котором значения, по крайней мере, некоторых из $\mathcal{M}_i$ являются неравновесными, однако распределение неравновесных возбуждений i -го сорта по состояниям определяется лишь $\mathcal{M}_i$ и температурой.

Подчеркнем, что при квазиравновесии равновесие между возбуждениями различных сортов, вообще говоря, отсутствует.

Распределение элементарных возбуждений i -го сорта характеризуется химическим потенциалом μ_i . Для фермионов используется описание в терминах частиц (электронов) и дырок. Химические потенциалы (квазиуровни Ферми) электронов и дырок удобно отсчитывать в стороны возрастания соответствующих энергий, т. е. в противоположные стороны.

3. Покажем, что при квазиравновесии имеет место универсальное соотношение между вероятностями излучения и поглощения.

Запишем условие равновесия между возбуждениями вещества и фотонами частоты ω :

$$B_e(\omega) [q(\omega) + 1] = B_a(\omega) q(\omega). \quad (1)$$

Здесь число фотонов

$$q(\omega) = [\exp((\hbar\omega - \mu_{ph}) / \theta) - 1]^{-1}, \quad (2)$$

μ_{ph} — химический потенциал фотонов. Подчеркнем, что $\mu_{ph} \neq 0$, поскольку отсутствует термодинамическое равновесие. Из (1), (2) находим

$$B_e / B_a = e^{(\mu_{ph} - \hbar\omega) / \theta} \equiv \Phi.$$

С другой стороны, условием равновесия между возбуждениями вещества и фотонами является

$$\mu_{ph} + \sum_i^{(-)} \mu_i = \sum_i^{(+)} \mu_i. \quad (3)$$

Здесь сумма в левой части относится к возбуждениям, которые уничтожаются при уничтожении (поглощении) фотона, сумма в правой части — к возбуждениям, которые рождаются при уничтожении фотона.

Теперь получаем

$$\frac{B_e(\omega; \theta, \dots; \mu_i, \dots)}{B_a(\omega; \theta, \dots; \mu_i, \dots)} = \Phi(\omega; \theta, \dots; \mu_i, \dots) \equiv \exp \left[\left(\sum_i^{(+)} \mu_i - \sum_i^{(-)} \mu_i - \hbar\omega \right) / \theta \right], \quad (4)$$

т. е. при квазиравновесии отношение вероятностей излучения и поглощения является универсальной функцией частоты, температуры и химических потенциалов возбуждений, участвующих в фотопереходе.

Заметим, что функция Φ зависит от химических потенциалов лишь неравновесных возбуждений, числа которых меняются при фотопереходе. Прочие же возбуждения дают нулевой вклад в показатель экспоненты (4). Действительно, для равновесных бозе-возбуждений $\mu = 0$, для равновесных ферми-возбуждений $\mu_e + \mu_h = 0$ (значки e и h относятся к электронам и дыркам соответственно). Для неравновесных возбуждений, число которых не меняется, μ входит дважды с противоположными знаками.

Ввиду (2), (3), проведенное рассмотрение относится лишь к области частот

$$\hbar\omega > \sum_i^{(+)} \mu_i - \sum_i^{(-)} \mu_i.$$

Однако ясно, что B_e, B_a являются аналитическими функциями всех μ_i (химические потенциалы входят в вероятности лишь через функции распределения). Поэтому соотношение (4) аналитически продолжается на область всех частот.

4. Соотношение (4) позволяет сформулировать в общем виде условие отрицательного поглощения на частоте ω при квазиравновесии:

$$\hbar\omega < \sum_i^{(+)} \mu_i - \sum_i^{(-)} \mu_i. \quad (5)$$

Заметим, что необходимым условием отрицательного поглощения является изменение числа неравновесных возбуждений при фотопереходе: в противном случае правая часть (5) обращается в нуль.

5. Рассмотрим простейший пример — двухуровневую систему. Элементарным возбуждением здесь является возбужденное состояние. Имеем

$$B_e / B_a = e^{(\epsilon - \hbar\omega) / \theta}.$$

Рассматриваемое возбуждение является паулионом, поэтому распределение фермиевское: среднее число заполнения возбужденного состояния

$$n_2 = [\exp((\epsilon - \mu) / \theta) + 1]^{-1},$$

где ϵ — энергия возбуждения. Среднее число заполнения основного состояния

$$n_1 = 1 - n_2.$$

Находим

$$\frac{B_e}{B_a} = \frac{n_2}{n_1} e^{(\epsilon - \hbar\omega) / \theta}. \quad (6)$$

Для кванта с энергией возбуждения $\hbar\omega = \epsilon$ получаем известное соотношение

$$B_e / B_a = n_2 / n_1;$$

это соответствует трехуровневой схеме, причем третий уровень явно не рассматривается.

Рассмотрим теперь четырехуровневую схему. Элементарному возбуждению соответствует верхний рабочий уровень; четвертый уровень явно не рассматривается. Пусть между основным и нижним рабочим уровнями имеется тепловое равновесие. Суммарную заселенность этих уровней обозначим n_1 , заселенность верхнего рабочего уровня — n_2 . Тогда по-прежнему имеет место (6). Энергия кванта $\hbar\omega = \varepsilon - \Delta$, где Δ — энергия нижнего рабочего уровня. Таким образом,

$$\frac{B_e}{B_a} = \frac{n_2}{n_1} e^{\Delta/kT};$$

условие отрицательного поглощения имеет вид

$$n_2 > n_1 e^{-\Delta/kT}.$$

Соотношение (4) существенно упрощает рассмотрение различных фотопереходов в полупроводниках. Здесь отметим лишь, что часто можно не учитывать нарушения теплового равновесия для фононов. При этом участие последних в фотопереходе сказывается в экспоненте (4) лишь на значении частоты.

Отметим, что соотношение типа (4) было получено для сложных молекул в работе ⁽¹⁾, а для прямых зона-зонных переходов в полупроводнике — в работах ^(2, 3).

6. В заключение укажем следующую причину, по которой практически важно знать точное значение отношения B_e/B_a . Усиление

$$\alpha = B_e - B_a = B_a(B_e/B_a - 1). \quad (7)$$

При генерации индуцированного излучения часто

$$|\alpha| \ll B_a \cong B_e.$$

Если в такой ситуации вычислять α с помощью первого из выражений (7), то небольшие ошибки в B_e , B_a могут привести к большой ошибке в α . Использование же второго выражения (7) и (4) приводит к ошибке в α , равной ошибке в B_a .

Автор глубоко признателен А. М. Прохорову за ценное обсуждение.

Институт физики
Академии наук УССР

Поступило
10 VII 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ Б. И. Степанов, Докл. АН БССР, 112, 839 (1957). ² G. J. Lasher, F. Stern, Phys. Rev., 133, A553 (1964). ³ D. E. McCumber, Phys. Rev., 136, A954 (1964).