

М. С. ПОФФЕ

КОНФОРМНЫЕ И КВАЗИКОНФОРМНЫЕ ВЛОЖЕНИЯ ОДНОЙ КОНЕЧНОЙ РИМАНОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ В ДРУГУЮ

(Представлено академиком М. А. Лаврентьевым 10 VI 1971)

1. Л. И. Болковиский поставил задачу (см. ⁽¹⁾) изучения конформных вложений одной конечной римановой поверхности (к.р.п.) в другую с точки зрения тейхмюллеровых пространств. В ⁽²⁾ приведены необходимые и достаточные условия того, чтобы аналитическое отображение некоторой окрестности заданной к.р.п. $\mathfrak{R}$ на окрестность другой к.р.п. $\mathfrak{R}$ можно было продолжить на всю поверхность $\mathfrak{R}$ так, чтобы $\mathfrak{R}$ отображалась взаимно однозначно и конформно на некоторую подобласть поверхности $\mathfrak{R}$. Подход Л. И. Волковиского к вопросу о возможности конформного вложения одной к.р.п. в другую состоит в следующем. Пусть к.р.п. $\mathfrak{R}$ фиксирована. Тогда в пространстве Тейхмюллера $T(\mathfrak{R})$ можно рассмотреть множество V поверхностей, которые конформно вкладываются в $\mathfrak{R}$. Если зафиксировать к.р.п. $\mathfrak{R}$, то в пространстве $T(\mathfrak{R})$ можно рассмотреть множество W поверхностей, в которые $\mathfrak{R}$ можно вложить конформно. В случае, когда к.р.п. $\mathfrak{R}$ не допускает конформного вложения в к.р.п. $\mathfrak{R}$, естественно возникает задача об экстремальном квазиконформном вложении поверхности $\mathfrak{R}$ в $\mathfrak{R}$.

В данной работе изучаются множества V и W , а также экстремальные квазиконформные вложения одной к.р.п. в другую.

2. Мы будем рассматривать только ориентированные конечные римановы поверхности. Ориентированная к.р.п. имеет конечный род g и может иметь конечное число n невырожденных граничных компонент. Такую к.р.п. мы будем называть к.р.п. типа $[g, n]$. Под вложением р.п. $\mathfrak{R}$ в р.п. $\mathfrak{R}$ будем понимать топологическое отображение $\mathfrak{R}$ в $\mathfrak{R}$. Пусть $\mathfrak{R}$ — к.р.п. типа $[g_1, n]$, а $\mathfrak{R}$ — к.р.п. типа $[g_2, m]$. Поверхность $\mathfrak{R}$ можно вложить в $\mathfrak{R}$ тогда и только тогда, когда либо $n \geq 1$, $g_1 \leq g_2$, либо $n = 0$, $m = 0$, $g_1 = g_2$. Пусть f — вложение к.р.п. $\mathfrak{R}$ в к.р.п. $\mathfrak{R}$. Обозначим через $\{f\}$ класс вложений поверхности $\mathfrak{R}$ в $\mathfrak{R}$, гомотопных f . В классе $\{f\}$ существует квазиконформное вложение. Существование экстремального квазиконформного вложения в классе $\{f\}$, т. е. квазиконформного вложения $f_0 \in \{f\}$, минимизирующего максимальную дилатацию $K[f']$ по всем $f' \in \{f\}$ (если f' неквазиконформно, считаем $K[f'] = \infty$), доказывается с помощью перехода к универсальным накрывающим поверхностям $\mathfrak{R}$ и $\mathfrak{R}$.

Пусть к.р.п. $\mathfrak{R}_0$ является подобластью к.р.п. $\mathfrak{R}_0$, $\mathfrak{R}_0 \subset \mathfrak{R}_0$. Рассмотрим пространство Тейхмюллера $T(\mathfrak{R}_0)$ и $T(\mathfrak{R}_0)$ (см. ⁽³⁾, гл. VI).

Обозначим $V_{\mathfrak{R}_0}(\mathfrak{R}_0)$ подмножество пространства $T(\mathfrak{R}_0)$, состоящее из тех отмеченных поверхностей $(\mathfrak{R}, f) \in T(\mathfrak{R}_0)$ (f — квазиконформный гомеоморфизм $\mathfrak{R}_0$ на $\mathfrak{R}$), для которых в классе $\{f^{-1}\}$ вложений к.р.п. $\mathfrak{R}$ в к.р.п. $\mathfrak{R}_0$ существует конформное вложение. Подмножество пространства $T(\mathfrak{R}_0)$, состоящее из тех отмеченных поверхностей $(\mathfrak{R}, h) \in T(\mathfrak{R}_0)$, для которых в классе $\{h\}$ вложений к.р.п. $\mathfrak{R}_0$ в к.р.п. $\mathfrak{R}$ существует конформное вложение, обозначим через $W_{\mathfrak{R}_0}(\mathfrak{R}_0)$.

Таким образом, мы ввели в пространствах Тейхмюллера $T(\mathfrak{R}_0)$ и $T(\mathfrak{R}_0)$ множество $V_{\mathfrak{R}_0}(\mathfrak{R}_0)$ поверхностей, которые конформно вкладываются в $\mathfrak{R}_0$, и множество $W_{\mathfrak{R}_0}(\mathfrak{R}_0)$ поверхностей, которые являются продолжением по-

верхности $\mathfrak{R}_0$. Множества $V_{\mathfrak{R}_0}(\mathfrak{R}_0)$ и $W_{\mathfrak{R}_0}(\mathfrak{R}_0)$ зависят от того, каким образом к.р.п. $\mathfrak{R}_0$ вложена в к.р.п. $\mathfrak{R}_0$.

Из существования экстремального квазиконформного вложения в классе гомотопных вложений одной к.р.п. в другую нетрудно получить, что множества $V_{\mathfrak{R}_0}(\mathfrak{R}_0)$ и $W_{\mathfrak{R}_0}(\mathfrak{R}_0)$ являются замкнутыми подмножествами в соответствующих пространствах $T(\mathfrak{R}_0)$ и $T(\mathfrak{R}_0)$.

Используя результаты работы ⁽⁴⁾, можно получить следующее достаточное условие, характеризующее внутренние точки множеств $V_{\mathfrak{R}_0}(\mathfrak{R}_0)$ и $W_{\mathfrak{R}_0}(\mathfrak{R}_0)$.

Предложение 1. Пусть $\text{mes}(\mathfrak{R}_0 \setminus \mathfrak{R}_0) > 0$, где $\text{mes}(\mathfrak{R}_0 \setminus \mathfrak{R}_0)$ обозначает двумерную меру Лебега множества $\mathfrak{R}_0 \setminus \mathfrak{R}_0$.

Тогда 1) $\mathfrak{R}_0$ — внутренняя точка множества $V_{\mathfrak{R}_0}(\mathfrak{R}_0)$,

2) $\mathfrak{R}_0$ — внутренняя точка множества $W_{\mathfrak{R}_0}(\mathfrak{R}_0)$.

Обозначим через $Q_{\mathfrak{M}}$ действительное векторное пространство регулярных квадратичных дифференциалов на к.р.п. $\mathfrak{M}$ (дифференциалы из $Q_{\mathfrak{M}}$ принимают действительные значения в граничных точках к.р.п. $\mathfrak{M}$ в терминах граничного униформизирующего параметра). Рассмотрим векторные пространства $Q_{\mathfrak{R}_0}$ и $Q_{\mathfrak{R}_0}$. Положим $Q_{\mathfrak{R}_0} \cap Q_{\mathfrak{R}_0} = \{\psi(z) dz^2 \in Q_{\mathfrak{R}_0} : \psi(z) dz^2|_{\mathfrak{R}_0} \in Q_{\mathfrak{R}_0}\}$.

Основным результатом работы является следующая

Теорема 1. Пусть $Q_{\mathfrak{R}_0} \cap Q_{\mathfrak{R}_0} = \{0\}$.

Тогда 1) $\mathfrak{R}_0$ — внутренняя точка множества $V_{\mathfrak{R}_0}(\mathfrak{R}_0)$,

2) $\mathfrak{R}_0$ — внутренняя точка множества $W_{\mathfrak{R}_0}(\mathfrak{R}_0)$.

Доказательство теоремы 1 опирается на вариационные формулы для модулей к.р.п., которые получаются из вариационных формул, приведенных в ⁽⁵⁾.

Если $\psi(z) dz^2 \in Q_{\mathfrak{R}_0} \cap Q_{\mathfrak{R}_0}$ и $\psi(z) dz^2 \equiv 0$, то относительная граница $\mathfrak{R}_0$ на $\mathfrak{R}_0$ состоит из конечного числа аналитических дуг, вдоль которых либо $\psi(z) dz^2 > 0$, либо $\psi(z) dz^2 < 0$ (см. ⁽²⁾, стр. 270 и ⁽⁶⁾, гл. VI). Из этого замечания, предложения 1 и теоремы 1 следует, что, если $\mathfrak{R}_0$ — граничная точка множества $V_{\mathfrak{R}_0}(\mathfrak{R}_0)$ или $\mathfrak{R}_0$ — граничная точка множества $W_{\mathfrak{R}_0}(\mathfrak{R}_0)$, то $\mathfrak{R}_0$ получается из $\mathfrak{R}_0$ проведением конечного числа аналитических разрезов, вдоль которых $\psi(z) dz^2 > 0$ или $\psi(z) dz^2 < 0$, где $\psi(z) dz^2 \in Q_{\mathfrak{R}_0}$.

Отсюда нетрудно получить

Предложение 2. Граничные точки множеств $V_{\mathfrak{R}_0}(\mathfrak{R}_0)$ и $W_{\mathfrak{R}_0}(\mathfrak{R}_0)$ являются достижимыми граничными точками.

3. Рассмотрим теперь экстремальные квазиконформные вложения одной к.р.п. в другую. Пусть f — вложение к.р.п. $\mathfrak{R}$ в к.р.п. $\mathfrak{M}$. В классе вложений $\{f\}$ существует экстремальное квазиконформное вложение f_0 .

Обозначим $f_0[\mathfrak{R}] = \mathfrak{M}$. $\mathfrak{M}$ — к.р.п., которая является подобластью к.р.п. $\mathfrak{M}$. Отображение $f_0: \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{M}$ — экстремальное квазиконформное отображение к.р.п. $\mathfrak{R}$ на к.р.п. $\mathfrak{M}$ в классе гомеоморфизмов поверхности $\mathfrak{R}$ на $\mathfrak{M}$, гомотопных f_0 . Поэтому f_0 — Тейхмюллеровское отображение (см. ^(7, 8)), т. е. f_0 либо конформно, либо квазиконформно с коэффициентом Бельтрами $\mu_0(z) = k_0 \overline{\varphi_0(z)} / |\varphi_0(z)|$, где $\varphi_0(z) dz^2 \in Q_{\mathfrak{R}}$, $0 < k_0 < 1$.

Предположим, что f_0 не является конформным вложением. Рассмотрим множество $V_{\mathfrak{R}}(\mathfrak{M})$. Если бы к.р.п. $\mathfrak{M}$ была внутренней точкой множества $V_{\mathfrak{R}}(\mathfrak{M})$, то f_0 не было бы экстремальным вложением. Следовательно, $\mathfrak{M}$ — граничная точка множества $V_{\mathfrak{R}}(\mathfrak{M})$ и, значит, получается из $\mathfrak{R}$ проведением конечного числа аналитических разрезов.

Используя гладкость границы экстремальной области $\mathfrak{M}$ и граничные вариации области $\mathfrak{M}$, которые применялись в ⁽⁹⁾, можно доказать следующую теорему.

Теорема 2. Пусть f_0 — экстремальное квазиконформное вложение к.р.п. $\mathfrak{R}$ в к.р.п. $\mathfrak{M}$ в классе $\{f\}$. Если f_0 не является конформным вложением, то ему соответствуют положительные квадратичные дифференциалы (см. ⁽¹⁰⁾, гл. III, 3.3) $\varphi_0(z) dz^2 \in Q_{\mathfrak{R}}$ и $\psi_0(w) dw^2 \in Q_{\mathfrak{M}}$ такие, что коэффициент Бельтрами отображения f_0 равен $\mu_0(z) = k_0 \overline{\varphi_0(z)} / |\varphi_0(z)|$, коэффициент

ент Бельтрами обратного отображения f_0^{-1} равен $\nu_0(w) = -\overline{k_0 \psi_0(w)} \times |\psi_0(w)|^{-1}$. Область $\mathfrak{M} = f_0[\mathfrak{R}]$ получается из $\mathfrak{R}$ проведением конечного числа аналитических разрезов, вдоль которых $\psi_0(w)dw^2 > 0$.

Таким образом, экстремальные квазиконформные вложения одной к.р.п. в другую описываются в терминах положительных квадратичных дифференциалов. Экстремальное отображение в данном гомотопическом классе вообще говоря, не единственно. Но справедлива следующая

Теорема 4. Пусть f_0 и f_1 — экстремальные квазиконформные вложения к.р.п. $\mathfrak{R}$ в к.р.п. $\mathfrak{R}$ в классе $\{f\}$.

Тогда $f_1 \circ f_0^{-1}$ — конформное отображение, гомотопное тождественному на $\mathfrak{R}$.

Это означает, что различные экстремальные отображения определяют одну и ту же точку пространства $T(\mathfrak{R})$.

Институт математики
Сибирского отделения Академии наук СССР
Новосибирск

Поступило
2 VI 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Л. И. Волков, В сборн. Некоторые проблемы математики и механики, «Наука», 1970, стр. 128.
- ² М. Шиффер, Д. К. Спенсер, Функционалы на конечных римановых поверхностях, ИЛ, 1957.
- ³ Л. Альфонс, Лекции по квазиконформным отображениям, 1969.
- ⁴ С. Л. Крушкаль, ДАН, 199, № 2 (1971).
- ⁵ С. Л. Крушкаль, ДАН, 189, № 3, 472 (1969).
- ⁶ A. C. Schaeffer, D. C. Spencer, Am. Math. Soc. Coll. Publ., 35 (1950).
- ⁷ Л. Берс, В сборн. Пространства римановых поверхностей и квазиконформных отображений, ИЛ, 1961, стр. 9.
- ⁸ Л. Альфонс, Там же, стр. 104.
- ⁹ П. А. Билута, ДАН, 171, № 1, 9 (1966).
- ¹⁰ Дж. Дженкинс, Однолистные функции и конформные отображения, ИЛ, 1962.
- ¹¹ O. Teichmüller, Abh. Preuss. Akad. Wiss. Math. — Naturw., KI, 22 (1940).