

Н. К. КАРАПЕТЯНЦ, С. Г. САМКО

ОБ ОДНОМ НОВОМ ПОДХОДЕ К ИССЛЕДОВАНИЮ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ СО СДВИГОМ

(Представлено академиком А. А. Дородницыным 15 VI 1971)

Рассматриваются сингулярные интегральные уравнения со сдвигом на простом замкнутом конечном ляпуновском контуре Γ :

$$\begin{aligned} (K\varphi)(t) &\equiv a(t)\varphi(t) + b(t)\varphi[\alpha(t)] + c(t)(S\varphi)(t) + \\ &\quad + d(t)(S\varphi)[\alpha(t)] = f(t), \\ t \in \Gamma, \quad (S\varphi)(t) &= \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi(\tau) d\tau}{\tau - t}. \end{aligned} \quad (1)$$

Сдвиг $\alpha(t)$ контура в себя (с сохранением или изменением ориентации на Γ) предполагается удовлетворяющим условию Карлемана $\alpha[\alpha(t)] \equiv t$ и обычным ^(1, 2) предположениям: $\alpha'(t) \in H^{\lambda}(\Gamma)$, $0 < \lambda \leq 1$, $\alpha'(t) \neq 0$ и $\alpha(t) \neq t$, $t \in \Gamma$. Оператор K рассматривается в пространстве $L_p(\Gamma)$, $1 < p < \infty$, а коэффициенты $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$, $d(t)$ считаются непрерывными на Γ^* .

Интегральным уравнениям (1) (и более общего вида) в пространстве $H^{\lambda}(\Gamma)$ посвящен ряд работ ⁽³⁻⁸⁾. Подробный обзор и библиографию по уравнениям со сдвигом можно найти в статье ⁽⁹⁾.

Известные результаты о нётеровости и индексе сингулярных операторов (1) со сдвигом основываются на использовании систем сингулярных интегральных уравнений (уже не содержащих сдвигов) и на гомотопии оператора, ему сопутствующего. Мы покажем, что теория уравнений со сдвигом может быть построена целиком в рамках теории одномерных сингулярных уравнений без обращения к системам. В частности, будет найдена простая и эффективная связь между данным и сопутствующим оператором, из которой немедленно следует одновременная их нётеровость и равенство индексов (без привлечения для этой цели гомотопии операторов, установление которой достаточно сложно, см. ⁽⁵⁾). Предлагаемый подход упрощает проблему регуляризации уравнения со сдвигом, поскольку теперь достаточно регуляризовать не систему сингулярных уравнений, а одно сингулярное уравнение.

В п. 1, 2 исследуется случай сдвига, сохраняющего ориентацию, в п. 3 — изменяющего ориентацию на противоположную, в п. 4 построен регуляризатор.

Следуя терминологии ⁽⁵⁾, оператор

$$\begin{aligned} (K'\varphi)(t) &= a(t)\varphi(t) - b(t)\varphi[\alpha(t)] + \\ &+ c(t)(S\varphi)(t) - d(t)(S\varphi)[\alpha(t)], \quad t \in \Gamma, \end{aligned} \quad (2)$$

будем называть сопутствующим оператору K . Введем еще оператор $\tilde{K}$, имеющий вид

$$\begin{aligned} (\tilde{K}\varphi)(t) &\equiv a[\alpha(t)]\varphi(t) - b(t)\varphi[\alpha(t)] + \\ &+ c[\alpha(t)](S\varphi)(t) - d(t)(S\varphi)[\alpha(t)], \quad t \in \Gamma, \end{aligned} \quad (3)$$

в случае сдвига, сохраняющего ориентацию, и

$$\begin{aligned} (\tilde{K}\varphi)(t) &\equiv a[\alpha(t)]\varphi(t) - b(t)\varphi[\alpha(t)] - \\ &- c[\alpha(t)](S\varphi)(t) - d(t)(S\varphi)[\alpha(t)], \quad t \in \Gamma, \end{aligned} \quad (3')$$

в случае сдвига, изменяющего ориентацию на Γ .

* Все результаты сохраняются, если оператор K рассматривать в пространстве $H^{\lambda}(\Gamma)$ и коэффициенты считать принадлежащими $H^{\lambda}(\Gamma)$.

Оператор $\tilde{K}$ играет важную роль в наших построениях и называется нами ассоциированным с K . Очевидно, K' и $\tilde{K}$ в (3) совпадают, если $a(t)$ и $c(t)$ инвариантны относительно сдвига $\alpha(t)$. Очевидно также, что $(K')' = K$ и $\tilde{\tilde{K}} = K$.

1. Связь между операторами K , K' , $\tilde{K}$. Пусть

$$(U\varphi)(t) = u(t)\varphi(t), \quad u(t) = \alpha(t) - t. \quad (4)$$

Так как в случае сохранения ориентации сдвиг $\alpha(t)$ не имеет неподвижных точек, то оператор U является ограниченным обратимым в $L_p(\Gamma)$ оператором. Непосредственной проверкой убеждаемся в справедливости равенства *

$$KU - UK' = T, \quad (5)$$

где оператор

$$(T\varphi)(t) = \frac{c(t)}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{u(\tau) - u(t)}{\tau - t} \varphi(\tau) d\tau + \frac{d(t)}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{u(\tau) - u[\alpha(t)]}{\tau - \alpha(t)} \varphi(\tau) d\tau, \quad (6)$$

очевидно, вполне непрерывен в $L_p(\Gamma)$. Таким образом, из (5) вытекает

Теорема 1. Операторы K и K' одновременно нётеровы в $L_p(\Gamma)$ и в случае нётеровости имеют одинаковый индекс.

Заметим, что для справедливости теоремы 1 от карлемановского сдвига $\alpha(t)$ достаточно требовать лишь непрерывности.

Обозначим далее $(A\varphi)(t) \equiv a(t)\varphi(t) + c(t)(S\varphi)(t)$ и $(\tilde{A}\varphi)(t) \equiv a[\alpha(t)]\varphi(t) + c[\alpha(t)](S\varphi)(t)$. Нетрудно проверить, что операторы $\tilde{A}K$ и $\tilde{K}A$ являются сопутствующими друг другу (с точностью до вполне непрерывного оператора). Но тогда из (5) вытекает, что $U\tilde{A}K - \tilde{K}AU = T_0$, где оператор T_0 вполне непрерывен, а U — оператор (4).

Следствие 1. Если $a(t) \pm c(t) \neq 0$, $t \in \Gamma$, то операторы K и $\tilde{K}$ одновременно нётеровы и в случае нётеровости имеют одинаковый индекс (ср. с теоремой 2).

2. Нётеровость оператора K . Рассмотрим алгебру M операторов $K + T$, где $\tilde{K}$ — оператор вида (1) с произвольными коэффициентами из $C(\Gamma)$, а T — вполне непрерывный в $L_p(\Gamma)$ оператор. Очевидно, в этой алгебре содержатся сингулярные операторы $a\varphi + cS\varphi + T\varphi$, в которых не участвует операция сдвига. Естественно поставить вопрос о нахождении для всякого оператора $K \in M$ такого оператора, композиция которого с K не содержит сдвига. Таким оператором оказывается ассоциированный оператор $\tilde{K}$. Действительно, для операторов K и $\tilde{K}$ имеем

$$\begin{aligned} (K\tilde{K}\varphi)(t) &= m(t)\varphi(t) + n(t)(S\varphi)(t) + (T_1\varphi)(t), \\ (\tilde{K}K\varphi)(t) &= m(t)\varphi(t) + n(t)(S\varphi)(t) + (T_2\varphi)(t), \end{aligned} \quad (7)$$

где T_1, T_2 — вполне непрерывные в $L_p(\Gamma)$ операторы, а

$$\begin{aligned} m(t) - n(t) &= \{a(t) - c(t)\} \{a[\alpha(t)] - c[\alpha(t)]\} - \{b(t) - d(t)\} \{b[\alpha(t)] - \\ &\quad - d[\alpha(t)]\} \stackrel{\text{def}}{=} \Delta_1(t), \\ m(t) + n(t) &= \{a(t) + c(t)\} \{a[\alpha(t)] + c[\alpha(t)]\} - \{b(t) + d(t)\} \{b[\alpha(t)] + \\ &\quad + d[\alpha(t)]\} \stackrel{\text{def}}{=} \Delta_2(t). \end{aligned}$$

Из (7) в силу теоремы Аткинсона следует, что условие

$$\Delta_1(t) \neq 0, \quad \Delta_2(t) \neq 0, \quad t \in \Gamma, \quad (8)$$

обеспечивает нётеровость операторов K и $\tilde{K}$ в $L_p(\Gamma)$.

Покажем, что при выполнении условия (8) операторы K и $\tilde{K}$ всегда (ср. со следствием 1) имеют одинаковый индекс. Но это вытекает из следствия 1, так как можно так изменить коэффициенты, что $a(t) \pm c(t) \neq 0$,

* Аналогичная связь между K и K' в случае изменения ориентации содержится в формуле (11).

$t \in \Gamma$. Именно, для любого $\varepsilon > 0$ и произвольной функции $h(t) \in C(\Gamma)$ нетрудно построить (комплекснозначную) функцию $h_\varepsilon(t) \in C(\Gamma)$ такую, что $h_\varepsilon(t) \neq 0$, $t \in \Gamma$, $\max_{t \in \Gamma} |h(t) - h_\varepsilon(t)| < \varepsilon$ (см. (5), стр. 97). Это означает,

что в любых достаточно малых окрестностях операторов K и $\tilde{K}$ существуют операторы K_ε и $\tilde{K}_\varepsilon$ такого же вида, для коэффициентов которых уже $a_\varepsilon(t) \pm \pm c_\varepsilon(t) \neq 0$, условие (8) сохраняется и в силу теории об устойчивости $\kappa(K_\varepsilon) + \kappa(K), \kappa(\tilde{K}_\varepsilon) = \kappa(\tilde{K})$.

Замечание 1. При $a(t) \pm c(t) \neq 0$ равенство индексов $\kappa(K) = \kappa(\tilde{K})$ следует также еще и из простой гомотопии между операторами K и $\tilde{K}'$, осуществляемой оператором

$$(K_\mu \varphi)(t) = a_\mu(t) \varphi(t) + b(t) \varphi[\alpha(t)] + \\ + c_\mu(t) (S\varphi)(t) + d(t) (S\varphi)[\alpha(t)], \quad 0 \leq \mu \leq 1,$$

где $a_\mu(t) \pm c_\mu(t) = [a(t) \pm c(t)]^{1-\mu} \{a[\alpha(t)] \pm c[\alpha(t)]\}^\mu$. При этом $\Delta_1(\mu, t) \equiv \Delta_1(t)$, $\Delta_2(\mu, t) \equiv \Delta_2(t)$ для всех $\mu \in [0, 1]$.

Теорема 2. Если выполнено условие (8), то операторы $K, K', \tilde{K}$, определяемые равенствами (1) – (3), нётеровы в $L_p(\Gamma)$ и имеют одинаковый индекс

$$\kappa(K) = \kappa(K') = \kappa(\tilde{K}) = \frac{1}{2} \operatorname{ind} \frac{\Delta_1(t)}{\Delta_2(t)} *. \quad (9)$$

Замечание 2. Условие (8) нётеровости оператора K является необходимым, если коэффициенты $a(t), c(t)$ инвариантны относительно сдвига $\alpha(t)$ (см. теорему 1) или удовлетворяют условию $a(t) \pm c(t) \neq 0, t \in \Gamma$ (см. следствие 1). К этому же выводу можно прийти, если $b(t), d(t)$ инвариантны относительно сдвига $\alpha(t)$ или $b(t) \pm d(t) \neq 0, t \in \Gamma$.

3. Случай сдвига, изменяющего ориентацию. Ассоциированный оператор здесь берется в виде (3'). Для операторов (1) и (3') имеем

$$(K\tilde{K}\varphi)(t) = p(t)\varphi(t) + q(t)(S\varphi)(t) + (T_3\varphi)(t), \\ (\tilde{K}K\varphi)(t) = p(t)\varphi(t) + q(t)(S\varphi)(t) + (T_5\varphi)(t), \quad (10)$$

где $p(t) + q(t) = \{a(t) + c(t)\} \{a[\alpha(t)] - c[\alpha(t)]\} - \{b(t) - d(t)\} \times \times \{b[\alpha(t)] + d[\alpha(t)]\} \operatorname{def} \Delta(t)$ и $p(t) - q(t) = \Delta[\alpha(t)]$, а операторы T_3, T_4 вполне непрерывны в $\overline{L}_p(\Gamma)$. Поэтому аналогично (8) получаем, что условие $\Delta(t) \neq 0$ обеспечивает нётеровость оператора K . Остается вычислить индекс $\kappa(K)$. Покажем, что $\kappa(K) = \kappa(\tilde{K})$. Имеет место связь между K и K' , подобная (5):

$$KS - SK' = T_5, \quad (11)$$

где T_5 вполне непрерывен в $L_p(\Gamma)$, так что $\kappa(K) = \kappa(K')$.

Обозначим $(A\varphi)(t) = a(t)\varphi(t) + c(t)(S\varphi)(t)$ и $(A_1\varphi)(t) = a[\alpha(t)]\varphi(t) - c[\alpha(t)](S\varphi)(t)$. Как и в п. 2, можно считать, что $a(t) \pm \pm c(t) \neq 0, t \in \Gamma$. Очевидно, $\kappa(A) = \kappa(A_1)$. Замечая, что операторы A_1K и $\tilde{K}A$ являются сопутствующими (с точностью до вполне непрерывности слагаемого), $(A_1K)' = \tilde{K}A + T$, получаем в силу (11), что $\kappa(A_1K) = \kappa(\tilde{K}A)$, и отсюда $\kappa(K) = \kappa(\tilde{K})$. Таким образом, справедлива

Теорема 3. Если $\Delta(t) \neq 0$, то операторы K, K' и $\tilde{K}$, определяемые равенствами (1), (2), (3'), нётеровы в $L_p(\Gamma)$ и имеют одинаковый индекс $\kappa(K) = \kappa(\tilde{K}) = \kappa(K') = -\operatorname{ind} \Delta(t)$.

Замечание 3. При $a(t) \pm c(t) \neq 0$ равенство индексов $\kappa(K) = \kappa(\tilde{K})$ при выполнении условия нётеровости $\Delta(t) \neq 0$ следует еще и из простой

* Отметим в связи с формулой (9) справедливость следующего факта: индекс Копи ($\operatorname{ind} A(t)$) функции $A(t) \in C(\Gamma)$, $A(t) \neq 0$, кратен m , если $A(t)$ инвариантна относительно карлемановского сдвига $\alpha(t)$ порядка m ($m \geq 2$): $A[\alpha(t)] \equiv A(t)$.

гомотопии между операторами K и $\tilde{K}$, осуществляемой оператором K_μ :

$$(K_\mu \varphi)(t) = a_\mu(t) \varphi(t) + b_\mu(t) \varphi[\alpha(t)] + c_\mu(t) (S\varphi)(t) + \\ + d_\mu(t) (S\varphi)[\alpha(t)], \quad 0 \leq \mu \leq 1,$$

где $b_\mu(t) \pm d_\mu(t) = e^{\pm i\mu\pi} [b(t) \pm d(t)]$ (ср. (5), стр. 97) и $a_\mu(t) \pm c_\mu(t) = \{a(t) \pm c(t)\}^{1-\mu} \{a[\alpha(t)] \mp c[\alpha(t)]\}^\mu$.

4. О регуляризации. Регуляризатором (левым и правым) для оператора $\tilde{K}$ служит в силу (7) или (10) оператор $R = \tilde{K}N$, где N — регуляризатор для соответствующего одномерного сингулярного оператора. Таким образом, с точностью до вполне непрерывного оператора

$$(R\varphi)(t) = r(t) \varphi(t) + s(t) \varphi[\alpha(t)] + v(t) (S\varphi)(t) + w(t) (S\varphi)[\alpha(t)],$$

где

$$r(t) + v(t) = \frac{a[\alpha(t)] + c[\alpha(t)]}{\Delta_2(t)}, \quad r(t) - v(t) = \frac{a[\alpha(t)] - c[\alpha(t)]}{\Delta_1(t)}, \\ w(t) + s(t) = -\frac{b(t) + d(t)}{\Delta_2(t)}, \quad w(t) - s(t) = \frac{b(t) - d(t)}{\Delta_1(t)}$$

в случае сдвига, сохраняющего ориентацию, и

$$r(t) + v(t) = \frac{a[\alpha(t)] - c[\alpha(t)]}{\Delta(t)}, \quad r(t) - v(t) = \frac{a[\alpha(t)] + c[\alpha(t)]}{\Delta[\alpha(t)]}, \\ w(t) + s(t) = -\frac{b(t) + d(t)}{\Delta[\alpha(t)]}, \quad w(t) - s(t) = \frac{b(t) - d(t)}{\Delta(t)}$$

в случае сдвига, изменяющего ориентацию.

Ростовский государственный
университет

Поступило
10 VI 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Ф. Д. Гахов, Краевые задачи, М., 1963. ² Н. П. Векуа, Системы сингулярных интегральных уравнений, «Наука», 1970. ³ Г. С. Литвинчук, Изв. АН СССР, сер. матем., 31, № 3, 563 (1967). ⁴ Г. С. Литвинчук, Изв. АН СССР, сер. матем., 32, № 6, 1414 (1968). ⁵ Э. И. Зверович, Г. С. Литвинчук, УМН, 123, в. 3, 67 (1968). ⁶ Р. А. Кордзадзе, ДАН, 185, № 4, 753 (1969). ⁷ А. Б. Антонович, ДАН, 190, № 4, 751 (1970). ⁸ Г. Ф. Манджavidзе, Тр. Тбилисск. матем. инст., 33, 76 (1967).