

О. В. БЕСОВ

НЕРАВЕНСТВА ДЛЯ МОДУЛЕЙ НЕПРЕРЫВНОСТИ ФУНКЦИЙ, ЗАДАННЫХ НА ОБЛАСТИ, И ТЕОРЕМЫ ВЛОЖЕНИЯ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 14 VI 1971)

Для функций $f(x)$, заданных на области $G \subset E^n$, устанавливаются оценки, связывающие модули непрерывности (или разности) функций и их производных в нормах L_p, L_q . Эти оценки используются для получения теорем вложения и продолжения анизотропных функциональных пространств с дробным показателем гладкости.

Для заданных во всем пространстве E^n функций результаты разных авторов по оценкам модулей непрерывности в обычных L_p -нормах обобщены в (1). П. Л. Ульяновым получены в одномерном случае оценки модулей непрерывности (первого порядка) в различных нормах (2), носящие окончательный характер (см. также (3)). Ниже будут приведены, в частности, обобщения указанных результатов на случай функций многих переменных, заданных в области, и векторных $p = (p_1, \dots, p_n)$.

Пусть $p = (p_1, \dots, p_n)$, $1 \leq p_i \leq \infty$ ($i = 1, \dots, n$), $x = (x_1, \dots, x_n)$,

$$\|f\|_p = \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \left[\dots \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^{p_1} dx_1 \right)^{1/p_1} \dots \right]^{p_n} dx_n \right\}^{1/p_n}, \quad \|f\|_{p,G} = \|f_G\|_p,$$

где $f_G(x) = f(x)$ на G , $f_G(x) = 0$ вне G . В случае $p_i = \infty$ вместо соответствующей частной L_{p_i} -нормы берется существенная верхняя грань модуля функции по x_i . Через $L_p(G)$ обозначается пространство функций с конечной нормой $\|f\|_{p,G}$.

Для $p = (p_1, \dots, p_n)$, $q = (q_1, \dots, q_n)$ будем писать $p < q$ ($p \leq q$), если для всех $i = 1, \dots, n$ $p_i < q_i$ ($p_i \leq q_i$). Положим еще $(1, \dots, 1) = 1$, $(\infty, \dots, \infty) = \infty$, $p : q = (p_1/q_1, \dots, p_n/q_n)$, $1/p = (1/p_1, \dots, 1/p_n)$, $p' = (p_1^{q_1}, \dots, p_n^{q_n})$.

Для $r = (r_1, \dots, r_n)$ с положительными координатами назовем r -рогом область

$$V(r) = \bigcup_{0 < h < H} \left\{ x : \frac{x_i}{a_i} > 0, \quad h < \left(\frac{x_i}{a_i} \right)^{r_i} < (1 + \varepsilon)h \quad (i = 1, \dots, n) \right\}.$$

Будем говорить, что область $G \subset E^n$ удовлетворяет условию r -рога, если существует конечное покрытие $\{G_k\}_{k=1}^K$ открытыми множествами G_k и набор $V_k(r)$, для которых

$$G = \bigcup_{k=1}^K G_k = \bigcup_{k=1}^K (G_k + V_k(r)) = \bigcup_{k=1}^K G_k^{(e)}, \quad (1)$$

где $G_k + V_k(r)$ означает арифметическую сумму множеств,

$$G_k^{(e)} = \{x : x \in G_k, \quad \rho(x, \partial G_k \setminus \partial G) > \varepsilon\}, \quad \varepsilon > 0.$$

Будем говорить при этом, что $G \subset E^n$ удовлетворяет сильному условию r -рога, если в (1) $G_k^{(e)}$ можно заменить на

$$G_k^{[\varepsilon]} = \{x : x \in G_k, \quad \rho(x, G \setminus G_k) > \varepsilon\}, \quad \varepsilon > 0.$$

Пусть $\Delta^m(z)f(x)$ означает разность порядка m с шагом z ,

$$\Delta^m(z; G)f(x) = \Delta^m(z)f(x) \quad \text{при} \quad [x, x + mz] \in G,$$

$$\Delta^m(z; G)f(x) = 0 \quad \text{при} \quad [x, x + mz] \notin G.$$

В случае вектора $z = z_i e_i$ координатного направления вместо $\Delta^m(z)f(x)$, $\Delta^m(z; G)f(x)$ будем писать соответственно $\Delta_i^m(z_i)f(x)$, $\Delta_i^m(z_i; G)f(x)$. Положим еще

$$\omega_z^m(\delta; G; f)_p = \sup_{|t| \leq \delta} \left\| \Delta^m \left(t \frac{z}{|z|} ; G \right) f \right\|_p,$$

$$\omega_i^m(\delta; G; f)_p = \omega_{e_i}^m(\delta; G; f)_p.$$

Будем пользоваться также обозначениями $[a]_1 = \min \{a, 1\}$,

$$\sigma_{\min} = \min_{1 \leq i \leq n} \sigma_i, \quad \rho(z) = \left(\sum_1^n |z_i|^{1/\sigma_i} \right)^{|\sigma|/n}, \quad |\sigma| = \sum_1^n \sigma_i.$$

Будем считать в дальнейшем, что область G удовлетворяет условию $\frac{1}{\sigma}$ -рога.

Теорема 1. Пусть $1 \leq p^i \leq q \leq \infty$ ($i = 0, 1, \dots, n$) и для каждого $i = 1, \dots, n$ либо $\theta_i = 1$, либо $1 \leq \theta_i \leq q_n$, $1 \leq p_n^i < q_n < \infty$. Пусть еще

$$\sigma_i r_i = (\sigma, 1/p_i - 1/q + \alpha) \geq 0 \quad (i = 1, \dots, n). \quad (2)$$

Тогда при $0 < \tau < H(G)$, $0 \leq T \leq H \leq H(G)$, $0 \leq N \leq M$, $0 \leq \beta \leq \alpha$, $1 \leq j \leq n$

$$\begin{aligned} \|\Delta_j^M(\tau^{\sigma_j}; G) D^\alpha f\|_q &\leq C [\tau : H]_1^{\sigma_j N} H^{-(\sigma, 1/p^0 - 1/q + \beta)} \|\Delta_j^{M-N}(\tau^{\sigma_j}; G) D^{\alpha-\beta} f\|_{p^0} + \\ &+ C \sum_{i=1}^n \left\{ \int_0^T \|\Delta_i^{m_i}(t^{\sigma_i}; G) f\|_{p_i}^{\theta_i} \frac{dt}{t^{1+\theta_i r_i \sigma_i}} \right\}^{1/\theta_i} + C \tau^{\sigma_j M} \sum_{i=1}^n J_i(T, H), \end{aligned} \quad (3)$$

где в общем случае

$$J_i(T, H) \leq \int_T^H \|\Delta_i^{m_i}(t^{\sigma_i}; G) f\|_{p_i} \frac{dt}{t^{1+r_i \sigma_i + \sigma_j M}},$$

а при $\sigma_j M > \sigma_i(m_i - r_i)$, $\tau \leq T$ $J_i(T, H) = 0$.

Следствие. В условиях теоремы 1 справедлива оценка

$$\omega_j^{m_j}(T^{\sigma_j}; G; D^\alpha f)_q \leq C \sum_{i=1}^n \left\{ \int_0^T \omega_i^{m_i}(t^{\sigma_i}; G; f)_p^{\theta_i} \frac{dt}{t^{1+\theta_i r_i \sigma_i}} \right\}^{1/\theta_i}, \quad (4)$$

обобщающая одномерную оценку П. Л. Ульянова (⁽²⁾, стр. 672).

Теорема 2. Пусть область $G \subset E^n$ удовлетворяет сильному условию $\frac{1}{\sigma}$ -рога, $1 \leq p^0 \leq p \leq \infty$.

Тогда существует линейная операция распространения функций на E^n : $f(x) \rightarrow \tilde{f}(x)$ такая, что при $0 \leq \tau \leq H(G)$, $0 \leq T \leq H \leq H(G)$ для всех функций $f(x)$ с конечной правой частью

$$\begin{aligned} \|\Delta_j^M(\tau^{\sigma_j}) D^\alpha \tilde{f}\|_p &\leq C \tau^{\sigma_j M} H^{-\sigma_j M - (\sigma, 1/p^0 - 1/p + \alpha)} \|f\|_{p^0, G} + \\ &+ C \sum_{i=1}^n \int_0^T \|\Delta_i^{m_i}(t^{\sigma_i}; G) f\|_p \frac{dt}{t^{1+(\sigma, \alpha)}} + C \tau^{\sigma_j M} \sum_{i=1}^n J_i(T, H), \end{aligned} \quad (5)$$

где в общем случае

$$J_i(T, H) \leq \int_T^H \|\Delta_i^{m_i}(t^{\sigma_i}; G) f\|_p \frac{dt}{t^{1+(\sigma, \alpha) + \sigma_j M}},$$

а при $M \sigma_j > \sigma_i m_i - (\sigma, \alpha)$, $\tau \leq T$, $J_i(T, H) = 0$.

При этом $\tilde{f}(x) = f(x)$ на G , $\tilde{f}(x) = 0$ вне наперед заданной δ -окрестности G , $M = 0, 1, \dots$, $C = C(G, \delta, M, p, p^0, \alpha)$.

Теорема 3. Пусть $1 \leq p^0 \leq q \leq \infty$, $1 \leq p \leq q \leq \infty$, $(|\sigma|/n)\mu = (\sigma, 1/p - 1/q + \alpha) \geq 0$ и либо $\theta = 1$, либо $1 \leq \theta \leq q_n$, $1 \leq p_n < q_n < \infty$.

Тогда при $v_i \geq 0$, $0 \leq T \leq H \leq H(G)$, $0 \leq N \leq M$, $0 \leq \beta \leq \alpha$

$$\begin{aligned} & \|\Delta^M(v^\sigma; G) D^\alpha f\|_q \leq C [|v| : H]_1^{N\sigma_{\min}} H^{-(\sigma, 1/p^0 - 1/q + \beta)} \times \\ & \times \|\Delta^{M-N}(v^\sigma; G) D^{\alpha-\beta} f\|_{p^0} + C \left\{ \int_{0 \leq z \leq T^\sigma} \|\Delta^m(z; G) f\|_p^\theta \frac{dz}{\rho(z)^{n+\mu\theta}} \right\}^{1/\theta} + \\ & + C |v|^{M\sigma_{\min}} \int_{T^\sigma \leq z \leq H^\sigma} \|\Delta^m(z; G) f\|_p \frac{dz}{\rho(z)^{n+\mu+nM\sigma_{\min}/|\sigma|}}. \end{aligned} \quad (6)$$

При этом $\sigma_{\min}$ можно заменить на σ_j , если шаг разности $v = v_j e_j$.

Следствие. В условиях теоремы 3

$$\sup_{\rho(v) \leq T} \|\Delta^m(v; G) D^\alpha f\|_q \leq C \left\{ \int_0^T \sup_{\rho(z) \leq t} \|\Delta^m(z; G) f\|_p^\theta \frac{dt}{t^{1+\mu\theta}} \right\}^{1/\theta}, \quad (7)$$

что также обобщает соответствующее одномерное неравенство П. Л. Ульянова (⁽²⁾, стр. 672).

Теорема 4. Пусть $1 \leq p^i \leq q \leq \infty$ ($i = 0, 1, \dots, n$) и для каждого $i = 1, \dots, n$ либо $\theta_i = 1$, либо $1 \leq \theta_i \leq q_n$ и $1 \leq p_n^i < q_n < \infty$. Пусть еще выполнено условие (2).

Тогда при $0 \leq z_i \leq T \leq H \leq H(G)$ ($i = 1, \dots, n$), $0 \leq N \leq M$

$$\begin{aligned} \|\Delta^M(z^\sigma; G) D^\alpha f\|_q & \leq C [|z| : H]_1^{N\sigma_{\min}} H^{-(\sigma, 1/p^0 - 1/q + \beta)} \|\Delta^{M-N}(z^\sigma; G) D^{\alpha-\beta} f\|_{p^0} + \\ & + C \sum_{i=1}^n \left\{ \int_0^T \|\Delta_i^{m_i}(t^{\sigma_i}; G) f\|_{p_i^i}^{\theta_i} \frac{dt}{t^{1+\theta_i r_i \sigma_i}} \right\}^{1/\theta_i} + \\ & + C |z|^{M\sigma_{\min}} \int_T^H \|\Delta_i^{m_i}(t^{\sigma_i}; G) f\|_{p_i^i} \frac{dt}{t^{1+r_i \sigma_i + M\sigma_{\min}}}. \end{aligned} \quad (8)$$

Доказательства указанных теорем проводятся на основе интегрального представления функций типа представления В. П. Ильина (см., например, (⁽⁴⁾)) и оценок интегралов типа потенциала, уточняющих известную оценку Харди — Литлвуда, см. (⁽⁵⁾, ⁽⁶⁾).

В теоремах 1, 3, 4 при $M = 0$ можно ослабить требования на область G , считая в (1) $\varepsilon = 0$.

В качестве следствия приведенных неравенств можно получить теоремы вложения и продолжения различных классов функций и функциональных пространств. Введем необходимые определения.

Назовем $\mathcal{H}$ -функционалом неотрицательный функционал $\mathcal{H}[\psi] = \mathcal{H}[\psi(h)]$, определенный на неотрицательных измеримых функциях $\psi(h)$, $0 < h < h_0 < \infty$, и удовлетворяющий следующим условиям при любых $a \geq 0$, $b \geq 0$, $\delta > 0$:

- 1) $\mathcal{H}[a\psi_1(h) + b\psi_2(h)] \leq Ca\mathcal{H}[\psi_1(h)] + Cb\mathcal{H}[\psi_2(h)]$;
- 2) $\mathcal{H}[\psi_1(h)] \leq C\mathcal{H}[\psi_2(h)]$ при $0 \leq \psi_1(h) \leq \psi_2(h)$;

$$3) \mathcal{H} \left[\int_0^{h_0/h} \psi(ht) \frac{t^\delta}{1+t^{2\delta}} \frac{dt}{t} \right] \leq C_1(\delta) \mathcal{H}[\psi(h)];$$

$$4) \mathcal{H} \left[\frac{h^\delta}{1+h^{2\delta}} \right] < \infty;$$

$$5) \int_0^H \psi(t) t^\delta \frac{dt}{t} \leq C(H, \delta) \mathcal{H}[\psi(h)], \quad 0 < H < h_0.$$

Параметр h_0 берется малым, хотя данное определение можно применять и при $h_0 \leq +\infty$. Наиболее употребительными в приложениях являются $\mathcal{H}$ -функционалы

$$\mathcal{H}_\infty[\psi(h)] = \sup_{0 < h < h_0} \psi(h), \quad \mathcal{H}_\theta[\psi(h)] = \left\{ \int_0^{h_0} \psi(h)^\theta dh/h \right\}^{1/\theta} \quad (1 \leq \theta < \infty).$$

Для получения теорем вложения функциональных пространств с дробными показателями дифференцируемости $\mathcal{H}$ -функционалы $\mathcal{H}_\infty$ применялись С. М. Никольским, затем $\mathcal{H}_\theta$ — О. В. Бесовым, затем обобщающие $\mathcal{H}_\infty$ и $\mathcal{H}_\theta$ функционалы типа максимизации — К. К. Головкиным. Понятие $\mathcal{H}$ -функционала по существу шире понятия функционала типа максимизации.

Обобщенным гильбертовым пространством $\mathcal{H}_{p^0, p^1, \dots, p^n}(G; 1/\sigma)$ назовем линейное пространство функций, определенных на области $G \subset E^n$ с конечной величиной

$$\|f\|_{\mathcal{H}_{p^0, p^1, \dots, p^n}(G; 1/\sigma)}^l = \|f\|_{p^0, G} + \sum_{i=1}^n \mathcal{H}[h^{-\sigma_i(l_i - k_i)} \|\Delta_i^{m_i}(h^{\sigma_i}; G) D_i^{k_i} f\|_{p^i}]. \quad (9)$$

Приведем одну из теорем вложения обобщенных гильбертовых пространств.

Теорема 5. Пусть $1 \leq p^i \leq q \leq \infty$ ($i = 0, 1, \dots, n$),

$$\mu_{ij} = \sigma_i l_i - (\sigma, 1/p^i - 1/q + \alpha) - \sigma_j l'_j \geq 0, \quad l'_j > 0 \quad (i, j = 1, \dots, n),$$

$$\mu_{0j} = \sigma_j l'_j + (\sigma, 1/p^0 - 1/q + \alpha), \quad \mu_i = \sigma_i l_i - (\sigma, 1/p^i - 1/q + \alpha) > 0.$$

Тогда для $f \in \mathcal{H}_{p^0, p^1, \dots, p^n}(G; 1/\sigma)$ производная $D^\alpha f \in \mathcal{H}_{q; \alpha, \dots, \alpha}^l(G; 1/\sigma)$, причем при $0 < l'_j < M$, достаточно малом $\delta > 0$, $0 < H \leq h_0(G)$ справедливы неравенства

$$\begin{aligned} \mathcal{H}[h^{-\sigma_j l'_j}] \sup_{0 < \tau \leq h} \|\Delta_j^M(\tau^{\sigma_j}; G) D^\alpha f\|_q &\leq CH^{-\mu_{0j}} \mathcal{H}\left[\left[\frac{h}{H}\right]_1^{\sigma_j M} \left(\frac{h}{H}\right)^{-\sigma_j l'_j}\right] \|f\|_{p^0, G} + \\ &+ C \sum_{i=1}^n H^{\mu_{ij}} \mathcal{H}[h^{-\sigma_i l_i} \|\Delta_i^{m_i}(h^{\sigma_i}; G) f\|_{p^i}], \\ \|D^\alpha f\|_{q, G} &\leq CH^{-(\sigma, 1/p^0 - 1/q + \alpha)} \|f\|_{p^0, G} + \\ &+ C \sum_{i=1}^n C(H, \mu_i) \mathcal{H}[h^{-\sigma_i l_i} \|\Delta_i^{m_i}(h^{\sigma_i}; G) f\|_{p^i}]. \end{aligned}$$

Основные результаты заметки были доложены на IV Математическом конгрессе в Ницце в 1970 году.

Математический институт им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР
Москва

Поступило
17 V 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ А. Ф. Тиман, Теория приближения функций действительного переменного, М., 1960. ² П. Л. Ульянов, Изв. АН СССР, сер. матем., **32**, 649 (1968). ³ В. А. Андриенко, Матем. сборн., **78**, 2 (1969). ⁴ О. В. Бесов, В. П. Ильин, Матем. сборн., **75**, 4 (1968). ⁵ В. П. Ильин, Матем. заметки, **6**, 2 (1969). ⁶ О. В. Бесов, В. П. Ильин, Матем. заметки, **6**, 2 (1969).