К Р И С Т А Л Л О Г Р А Ф И Я

Том 21 1976 Вып.

УДК 548.0:538.56

Б. В. БОКУТЬ, С. С. ГИРГЕЛЬ

О ПОЛЯРИЗАЦИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В ГИРОТРОПНЫХ КРИСТАЛЛАХ

Проведено феноменологическое исследование поляризации плоских электрома нитных волн в кристаллах, описываемых эрмитовым тензором диэлектрической пр ницаемости. В инвариантной форме получены выражения, определяющие поляриза цию векторов поля и их эллиптичность для произвольных направлений волновой нор мали и вектора гирации в кристалле. Получены условия линейной, а также кругово поляризации для векторов **D**, **E**, **H**.

В [1–3] с помощью инвариантного метода [4, 5] исследовались некоторы общие вопросы оптики кристаллов с эрмитовым тензором диэлектрическо проницаемости. Вместе с тем ряд вопросов, относящихся к поляризацион ным характеристикам плоских волн, требует дальнейшего изучения.

Настоящее сообщение посвящено теоретическому рассмотрению обще задачи о поляризации плоских электромагнитных волн в кристалла с эрмитовым тензором диэлектрической проницаемости с помощью инва риантного метода.

Рассматривая плоские гармонические волны в непоглощающих кристал лах, будем исходить из уравнений Максвелла

$$\mathbf{m}^{\times}\mathbf{E}=\mathbf{H}, \tag{1}$$

$$\mathbf{m}^{\times}\mathbf{H}=-\mathbf{D}, \tag{2}$$

и материального уравнения

$$\mathbf{E}=\varepsilon^{-1}\mathbf{D}, \tag{3}$$

где $\mathbf{m}^{\times}$ — антисимметричный тензор второго ранга, дуальный вектору реф ракции $\mathbf{m}=n\mathbf{n}$ (n — показатель преломления, $\mathbf{n}$ — единичный вектор волно вой нормали).

Эрмитов тензор обратной диэлектрической проницаемости ε^{-1} можн разбить на симметричную и антисимметричную части

$$\varepsilon^{-1}=\chi+i\mathbf{G}^{\times}, \quad \chi=\tilde{\chi}, \quad \tilde{\mathbf{G}}^{\times}=-\mathbf{G}^{\times}, \tag{4}$$

где $\mathbf{G}$ — вектор гирации.

Исключая из уравнений (1) — (3) $\mathbf{E}$ и $\mathbf{D}$, получаем уравнение

$$(1/n^2+\mathbf{n}^{\times}\varepsilon^{-1}\mathbf{n}^{\times})\mathbf{H}=0 \tag{5}$$

для определения напряженности магнитного поля $\mathbf{H}$. Условием существо вания ненулевых решений для $\mathbf{H}$ будет равенство нулю определителя мат рицы $\tau=1/n^2+\mathbf{n}^{\times}\varepsilon^{-1}\mathbf{n}^{\times}$, раскрывая который инвариантным способом [4, 5], получаем уравнения нормалей [2]

$$\frac{1}{n^4}+\frac{1}{n^2}\mathbf{n}(\chi-\chi_c)\mathbf{n}+\mathbf{n}\bar{\chi}\mathbf{n}-(\mathbf{n}\mathbf{G})^2=0, \tag{6}$$

где χ_c — след матрицы χ, $\bar{\chi}=\chi^{-1}|\chi|$ — матрица, взаимная χ, а $|\chi|$ — опре делитель матрицы χ.

Рассмотрим некоторые соотношения для векторов **D**, **E**, **H** двух изонормальных волн, соответствующих двум различным показателям преломления n_+ и n_-. Так как $\mathbf{H}_+$ и $\mathbf{H}_-$ являются собственными векторами эрмитовой матрицы $\mathbf{n}^\times \varepsilon^{-1} \mathbf{n}^\times$ с различными собственными значениями $(-1/n_+^2)$ и $(-1/n_-^2)$, то они ортогональны, т. е. $\mathbf{H}_+\mathbf{H}_-^*=0$. Используя теперь уравнения (1), (2), можно получить следующие соотношения для векторов поля изонормальных волн:

$$\mathbf{D}_\pm \| \mathbf{H}_\mp^*, \quad \mathbf{H}_\pm \| [\mathbf{n}\mathbf{H}_\mp^*], \quad \mathbf{D}_\pm \mathbf{D}_\mp^* = \mathbf{E}_\pm \mathbf{D}_\mp^* = 0. \tag{7}$$

Поскольку в (5) $|\tau|=0$, то $\ddagger \bar{\tau} \ddagger$ является диадой.

Учитывая эрмитовость τ, найдем [3]

$$\bar{\tau} \sim \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}^*. \tag{8}$$

При $\bar{\tau} \neq 0$, согласно [2]

$$\bar{\tau} = \overline{\mathbf{n}\varepsilon^{-1}\mathbf{n}} \cdot \mathbf{n}^\times \mathbf{n}^\times - 1/n^2 \mathbf{n}^\times \varepsilon^{-1} \mathbf{n}^\times. \tag{9}$$

Умножая (9) справа на произвольный вектор **d** ($[\mathbf{dn}] \neq 0$) и учитывая (8), получим

$$\mathbf{H}_\pm \| ([\mathbf{n},\ (\chi - 1/n_\mp^2) \cdot [\mathbf{nd}]] - i n \mathbf{G} \cdot [\mathbf{nd}]). \tag{10}$$

Если правая часть (10) обращается в нуль, то из (10) следует

$$\mathbf{H} \| [\mathbf{nd}^*]. \tag{11}$$

Для векторов поля **D** и **E** из (2), (3) и (7) получаем

$$\mathbf{D}_\pm \| ([\mathbf{n},\ (\chi - 1/n_\pm^2) [\mathbf{nd}^*]] + i n \mathbf{G} \cdot [\mathbf{nd}^*]), \tag{12}$$

$$\mathbf{E}_\pm = (\chi + i\mathbf{G}^\times) \mathbf{D}_\pm. \tag{12a}$$

Выражение (10) можно преобразовать и записать в другом виде, более удобном для анализа, полагая в (10) $\mathbf{d} = \mathring{\mathbf{H}}_\pm$

$$\mathbf{H}_\pm \| (\mathring{\mathbf{H}}_\pm \pm i\gamma [\mathbf{n}\mathring{\mathbf{H}}_\pm]), \tag{13}$$

$$\gamma = \mathbf{nG} / (1/\mathring{n}_+^2 - 1/\mathring{n}_-^2), \tag{13a}$$

где $\mathring{\mathbf{H}}_\pm$ и $\mathring{n}_\pm$ — векторы напряженностей магнитного поля и показатели преломления линейно поляризованных изонормальных волн в отсутствие гиротропии ($\mathbf{G}=0$), а γ — эллиптичность волны. Представление (13а) для эллиптичности γ, как нетрудно показать, эквивалентно соответствующему выражению в [6].

Введем угол φ соотношением

$$\operatorname{tg} 2\varphi = 2\mathbf{nG} / (1/\mathring{n}_+^2 - 1/\mathring{n}_-^2), \qquad |\varphi| \leqslant \pi/4, \tag{14}$$

тогда выражение (13а) для эллиптичности γ можно записать в иной форме

$$\gamma = \operatorname{tg} \varphi. \tag{15}$$

Если использовать аксиальное представление тензора χ [4]

$$\chi = a + b(\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{c}_2 + \mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{c}_1), \tag{16}$$

где $\mathbf{c}_1$ и $\mathbf{c}_2$ — оптические оси кристалла, то

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \mathbf{nG} / \{b([\mathbf{nc}_1]^2 [\mathbf{nc}_2]^2)^{1/2}\} \tag{17}$$

и при $|\operatorname{tg} 2\varphi| \ll 1$, т. е. для направлений волновой нормали **n**, достаточно удаленных от оптических осей получаем простое выражение для эллиптичности

$$\gamma \approx \varphi \approx \mathbf{nG} / \{2b([\mathbf{nc}_1]^2 [\mathbf{nc}_2]^2)^{1/2}\}. \tag{18}$$

Формулы (10—14) дают общие выражения для поляризации плоских электромагнитных волн, которые справедливы как для одноосных, так и для двуосных кристаллов. Из (13), (14) следует, что векторы магнитного поля обоих изонормальных волн описывают (в противоположных направлениях) эллипсы с одинаковым отношением осей и лежащие в одной плоскости, причем главные оси эллипсов взаимно ортогональны [6].

Формулы (14), (15) теряют смысл, если волновая нормаль совпадает с оптической осью $\mathbf{c}_i$ ($i=1, 2$) кристалла. В этом случае в качестве $\mathbf{d}$ в (10) можно взять любой вектор, неколлинеарный $\mathbf{n}$. Тогда при $\mathbf{c}_i\mathbf{G}\neq 0$ для $\mathbf{H}$ получаем выражения

$$\mathbf{H}_{\pm}\parallel([\mathbf{c}_i\mathbf{d}]\pm i[\mathbf{c}_i[\mathbf{c}_i\mathbf{d}]]),$$

соответствующие двум циркулярно поляризованным волнам с различным направлением вращения [2].

Наконец, если $\bar{\tau}=0$ (что может выполняться лишь для направлений волновой нормали, совпадающих с оптической осью кристалла, при выполнении дополнительного условия ортогональности вектора гирации $\mathbf{G}$ и волновой нормали $\mathbf{n}$), то в кристалле может распространяться лишь одна волна с произвольной поляризацией [2].

Таким образом, напряженность магнитного поля, вообще говоря, представляет собой две эллиптически поляризованные волны, векторы поляризации которых ортогональны. Линейная поляризация векторов $\mathbf{H}$ будет лишь при $\mathbf{nG}=0$, круговая — при $\mathbf{n}\parallel\mathbf{c}_i$, а произвольная — при одновременном выполнении условий $\mathbf{n}\parallel\mathbf{c}_i$ и $\mathbf{nG}=0$, что может осуществляться лишь в тех кристаллах, в которых $\mathbf{c}_i\mathbf{G}=0$.

Обратимся к рассмотрению поляризации электрической напряженности $\mathbf{E}$. Вектор $\mathbf{E}$, как и $\mathbf{H}$, в общем случае поляризован эллиптически. Однако при определенных условиях вектор $\mathbf{E}$ может иметь круговую, линейную и даже произвольную поляризацию. Определим эти условия.

Сначала рассмотрим условия линейной поляризации. Будем использовать критерий линейной поляризации $\mathbf{E}$ в инвариантном виде [4]

$$[\mathbf{EE}^*]=0 \text{ или } [(\chi+i\mathbf{G}^{\times})\mathbf{D},\ (\chi-i\mathbf{G}^{\times})\mathbf{D}^*]=0. \tag{19}$$

Ясно, что вектор $\mathbf{E}$ может быть линейным лишь при ограничении

$$\mathbf{nG}=0, \tag{20}$$

так как в противном случае вектор $\mathbf{H}$ также был бы линейным. При выполнении требования (20) $\mathbf{D}=\mathbf{D}^*=\mathring{\mathbf{D}}$, где $\mathring{\mathbf{D}}$ — поляризация $\mathbf{D}$ в отсутствие гиротропии и выражение (19) сводится к

$$[\mathring{\mathbf{D}}\chi[\mathbf{G}\mathring{\mathbf{D}}]]=0. \tag{21}$$

Так как $\mathring{\mathbf{D}}\chi\mathring{\mathbf{D}}\neq 0$ вследствие положительной определенности матрицы χ, то из условия (21) остается лишь требование

$$[\mathbf{G}\mathring{\mathbf{D}}]=0. \tag{22}$$

Ограничения (20) и (22) эквивалентны одному условию

$$[\mathbf{GD}]=0. \tag{23}$$

Следовательно, соотношение (23) является необходимым и достаточным условием линейной поляризации вектора напряженности электрического поля $\mathbf{E}_{\pm}$ одной из двух изонормальных волн, которые могут распространяться в кристалле. При этом, как следует из (25), вектор $\mathbf{E}_{\mp}$ второй изонормальной волны будет эллиптическим, но удовлетворять соотношениям $\mathbf{E}_{\pm}\mathbf{E}_{\mp}=\mathbf{E}_{\mp}\mathbf{G}=0$, т. е. находиться в плоскости векторов $\mathbf{n}$ и $[\mathbf{nG}]$.

Задание вектора $\mathbf{D}$ определяет нормаль $\mathbf{n}$ [4]

$$\mathbf{n}\parallel[\mathbf{D}[\varepsilon^{-1}\mathbf{D},\ \mathbf{D}]], \tag{24}$$

поэтому условию линейной поляризации $\mathbf{E}$ (23) для одной из двух изонормальных волн всегда можно удовлетворить, взяв (при $[\chi\mathbf{G},\mathbf{G}]\neq 0$)

$$\mathbf{n}\parallel[\mathbf{G}[\chi\mathbf{G},\mathbf{G}]]. \tag{25}$$

Направления, определяющие линейную поляризацию

Кристалл	Взаимное расположение оптических осей и вектора гирации в кристалле	Направление нормали n, определяющее линейную поляризацию	Количество направлений	Вид волны
Двуосный	$[\mathbf{G}, (\mathbf{c}_1\cdot\mathbf{c}_2+\mathbf{c}_1\cdot\mathbf{c}_1)\,\mathbf{G}]\neq 0$	$\mathbf{n}\parallel[\mathbf{G}\,[\mathbf{G}, (\mathbf{c}_1\cdot\mathbf{c}_2+\mathbf{c}_2\cdot\mathbf{c}_1)\,\mathbf{G}]$	Одно	$\mathbf{E}_{\pm}$
	$[\mathbf{G}\,[\mathbf{c}_1\mathbf{c}_2]]=0$	$\mathbf{n}\parallel(\mathbf{c}_1+k\,\mathbf{c}_2)$, $k>0$	Сектор	$\mathbf{E}_{\pm}$
		где k — произв. $k<0$	То же	$\mathbf{E}_{\mp}$
	$[\mathbf{G}, \mathbf{c}_1+\mathbf{c}_2]=0$	$\mathbf{n}\parallel(\mathbf{c}_1-\mathbf{c}_2)$	Одно	$\mathbf{E}_{\pm}$
		$\mathbf{n}\parallel[\mathbf{c}_1\mathbf{c}_2]$	То же	$\mathbf{E}_{\mp}$
	$[\mathbf{G}, \mathbf{c}_1-\mathbf{c}_2]=0$	$\mathbf{n}\perp\mathbf{G}$	Плоскость	$\mathbf{E}_{\mp}$
Одноосный	$\mathbf{cG}\cdot[\mathbf{cG}]\neq 0$	$\mathbf{n}\parallel[\mathbf{G}\,[\mathbf{Gc}]]$	Одно	$\mathbf{E}_e$
	$\mathbf{cG}=0=0$	$\mathbf{n}\perp\mathbf{G}$	Плоскость	$\mathbf{E}_e$
	$[\mathbf{cG}]=0$	$\mathbf{n}\perp\mathbf{G}$	То же	$\mathbf{E}_0$

Если же $[\chi\mathbf{G}, \mathbf{G}]=0$, то $\mathbf{n}$ становится неопределенным. Это означает, что в таких кристаллах имеется более чем одно направление нормали, которым соответствует линейная поляризация $\mathbf{E}$.

Эти направления представлены в таблице, из которой следует, что для линейной поляризации $\mathbf{E}$ в произвольном кристалле, описываемом эрмитовым тензором ε^{-1} (1) — (4) для одной из двух изонормальных волн всегда существует по крайней мере одно направление нормали $\mathbf{n}$, перпендикулярное $\mathbf{G}$. Если же $\mathbf{G}$ является собственным вектором тензора χ, тогда в кристалле имеется более чем одно направление $\mathbf{n}$ линейной поляризации $\mathbf{E}$: два, сектор или даже целая плоскость, причем все направления находятся в главных плоскостях тензора χ. Вектор же $\mathbf{E}$ другой изонормальной волны поляризован эллиптически и лежит в плоскости векторов $\mathbf{n}$ и $[\mathbf{nG}]$.

В заключение кратко остановимся на условиях круговой поляризации $\mathbf{E}$. Пусть в двуосном кристалле электромагнитная волна распространяется вдоль оптической оси $\mathbf{c}_1$. Для дальнейшего анализа выражение для кругового вектора индукции электрического поля $\mathbf{D}$ удобнее всего взять в форме

$$\mathbf{D}_{\pm}=\lambda([\mathbf{c}_1\mathbf{c}_2]\pm i[\mathbf{c}_1[\mathbf{c}_1\mathbf{c}_2]]). \tag{26}$$

Инвариантный критерий круговой поляризации для вектора $\mathbf{E}$ гласит

$$\mathbf{E}^2=0, \quad \text{т. е.} \quad (\chi\mathbf{D}+i\mathbf{G}^{\times}\mathbf{D})^2=0. \tag{27}$$

Представляя затем (26) и (16) в (27), после некоторых преобразований, получаем условие круговой поляризации вектора $\mathbf{E}$ для одной из изонормальных волн

$$\mathbf{G}[\mathbf{c}_1[\mathbf{c}_1\mathbf{c}_2]]\pm b[\mathbf{c}_1\mathbf{c}_2]^2=\mathbf{G}[\mathbf{c}_1\mathbf{c}_2]=0, \tag{28}$$

откуда вектор гирации $\mathbf{G}$ принимает вид

$$\mathbf{G}=\xi\mathbf{c}_1+b\mathbf{c}_2, \tag{29}$$

ξ — произвольное действительное число.

Как видно из (29), на $\mathbf{G}$ накладываются жесткие ограничения: он должен находиться в плоскости оптических осей $\mathbf{c}_1$ и $\mathbf{c}_2$ кристалла и для каждого своего направления иметь фиксированную, достаточно большую по сравнению с анизотропией, величину ($\mathbf{G}^2\geqslant b^2[\mathbf{c}_1\mathbf{c}_2]^2$), что может выполняться лишь для кристаллов с достаточно малой анизотропией.

Обратимся к одноосным кристаллам. Для волны, распространяющейся вдоль оси $\mathbf{c}$

$$\mathbf{D}_{\pm}=\lambda([\mathbf{cd}]\pm i[\mathbf{c}[\mathbf{cd}]]), \quad [\mathbf{dc}]\neq 0. \tag{30}$$

Условие (27) может выполняться, как нетрудно видеть, лишь при $\mathbf{cG}=0$. Тогда все волны поляризованы по кругу.

Можно показать, что для всех волновых нормалей, отличных от оптических осей $\mathbf{c}_i$ кристалла, круговая поляризация $\mathbf{E}$ невозможна.

Литература

1. В. Б. Бокуть. Кристаллография, **14**, 1002, 1969.
2. Л. М. Барковский. Кристаллография, **18**, 465, 1973.
3. Л. М. Барковский. Оптика и спектроскопия, **34**, 1193, 1973.
4. Ф. И. Федоров. Оптика анизотропных сред. Изд-во АН БССР, Минск, 1958.
5. Ф. И. Федоров. Теория упругих волн в кристаллах. «Наука», М., 1964.
6. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. Электродинамика сплошных сред. Физматгиз, М., 1959.

Гомельский государственный
университет

Поступила в редакцию
31.I.1975