Доклады Академии наук СССР
1972. Том 202, № 3

УДК 517.9 *МАТЕМАТИКА*

Н. Х. РОЗОВ

МЕТОД ЛОКАЛЬНЫХ СЕЧЕНИЙ ДЛЯ СИСТЕМ С ПРЕЛОМЛЕНИЕМ ТРАЕКТОРИЙ

(Представлено академиком Л. С. Понтрягиным 9 VI 1971)

Задача оптимального управления в терминах дифференциального включения сформулирована В. Г. Болтянским (см. ([1], [2])). В настоящей работе проводится обобщение предложенного им метода локальных сечений на случай, когда управляемый процесс описывается различными дифференциальными включениями в разных областях фазового пространства.

1. Постановка задачи. Пусть фазовое пространство R^{n+1} переменной $x = (x^0, x^1, \ldots, x^n)$ разбито гладкой гиперповерхностью $\Omega = \{x \mid \Phi(x) = 0\}$ на области $E_1 = \{x \mid \Phi(x) < 0\}$ и $E_2 = \{x \mid \Phi(x) > 0\}$, причем в области E_i, $i = 1, 2$, управляемый процесс описывается дифференциальным включением

$$\dot{x} \in F_i(x). \tag{1_i}$$

Предполагается, что оба эти дифференциальные включения обладают локальными сечениями (определение см. в ([1], [2])).

Рассмотрим непрерывную траекторию $x(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_2$, пересекающую гиперповерхность Ω один раз в момент $t_1 \in (t_0, t_2)$, причем эта траектория подходит к гиперповерхности Ω и отходит от нее под ненулевыми углами. Участок этой траектории, лежащий в области E_i, обозначим $x_i(t)$, $t_{i-1} \leqslant t \leqslant t_i$; при этом $x_1(t_1) = x_2(t_1) = \tilde{x} \in \Omega$. Функция $x_i(t)$ для всех, кроме конечного числа, значений $t \in [t_{i-1}, t_i]$ удовлетворяет дифференциальному включению (1_i). Пусть $\sigma_i(x, t)$ — локальное сечение, соответствующее решению $x_i(t)$, $t_{i-1} \leqslant t \leqslant t_i$, дифференциального включения (1_i), так что функция $x_i(t)$, $t_{i-1} \leqslant t \leqslant t_i$, удовлетворяет уравнению

$$\dot{x} = \sigma_i(x, t). \tag{2_i}$$

Предполагается также, что t_1 — точка (односторонней) непрерывности производной $\dot{x}_i(t)$ и локального сечения $\sigma_i(x, t)$ для $i = 1, 2$.

Будем считать, что траектория $x(t)$ удовлетворяет краевым условиям $x_1(t_0) = x_0 \in m$, $x_2(t_2) = x_2 \in M$, где m и M — данные многообразия в R^{n+1}, и является оптимальной: $x^0(t_2) = \min$. Наша задача состоит в получении необходимого условия оптимальности этой траектории.

2. Вариация траектории. Построим траекторию $x_1^*(t)$ уравнения (2_1), исходящую в момент t_0 из близкой к положению x_0 начальной точки $x_0^* = x_0 + \varepsilon\Delta_0 x + o(\varepsilon) \in m$, где ε — малое положительное число, а $\Delta_0 x$ — постоянный вектор (касательный к многообразию m в точке x_0), и соответствующую варьированию (с параметрами $\tau_j^{(1)}$, $v_j^{(1)}$, $l_j^{(1)}$, см. ([2], [3])) оптимального процесса на интервале $t_0 < t < t_1$. Если бы эта траектория на всем отрезке $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ удовлетворяла уравнению (2_1), то в момент t_1 изображающая точка прибыла бы в положение $x_1^*(t_1)$ (см. ([3]), стр. 99—103).

Однако в действительности эта траектория в момент $\tilde{t} = t_1 + \varepsilon\Delta t + o(\varepsilon)$, где Δt — положительное или отрицательное число, пересечет гиперповерхность Ω:

$$x_1^*(\tilde{t}) = x_1^*(t_1 + \varepsilon\Delta t + o(\varepsilon)) = \tilde{x}^* \in \Omega. \tag{3}$$

Поэтому, если $\Delta t < 0$, то при достаточно малом ε будет $\tilde{t} < t_1$; изображающая точка на отрезке $\tilde{t} \leqslant t \leqslant t_1$ двигается по закону (2_2) и в момент t_1 занимает некоторое положение $x_2^*(t_1) \in E_2$. Если же $\Delta t > 0$, то при достаточно малом ε будет $\tilde{t} > t_1$; изображающая точка на отрезке $t_1 \leqslant t \leqslant \tilde{t}$ продолжает двигаться по закону (2_1), а затем начинает двигаться по закону (2_2). Если бы нам хотелось считать, что и на отрезке $t_1 \leqslant t \leqslant \tilde{t}$ изображающая точка двигалась по закону (2_2), то для того чтобы в момент $\tilde{t}$ оказаться в положении $\tilde{x}^*$, она должна была бы в момент t_1 выходить из некоторого положения $x_2^*(t_1) \in E_1$.

В обоих случаях траектория уравнения (2_2), исходящая в момент t_1 из точки $x_2^*(t_1)$, совпадает при $t \geqslant \max(t_1, \tilde{t})$ с траекторией этого же уравнения, исходящей в момент $\tilde{t}$ из точки $\tilde{x}^*$. Поэтому можно построить траекторию $x_2^*(t)$ уравнения (2_2), исходящую в момент t_1 из точки $x_2^*(t_1)$ и соответствующую варьированию (с параметрами $\tau_j^{(2)}, v_j^{(2)}, l_j^{(2)}$) оптимального процесса на интервале $t_1 < t < t_2$. В итоге определяется (непрерывная) варьированная траектория $x^*(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_2$.

3. Соотношение между $\Delta_1 x$ и $\Delta_2 x$. Через $\varepsilon\Delta_1 x$ и $\varepsilon\Delta_2 x$ обозначим главную (линейную) часть приращений $x_1^*(t_1) - x_1(t_1)$ и $x_2^*(t_1) - x_2(t_1)$:

$$x_1^*(t_1) = \tilde{x} + \varepsilon\Delta_1 x + o(\varepsilon), \quad x_2^*(t_1) = \tilde{x} + \varepsilon\Delta_2 x + o(\varepsilon). \tag{4}$$

Пусть Π—гиперплоскость, касательная к гиперплоскости Ω в точке $\tilde{x}$. Так как $\tilde{x}^* \in \Omega$, то

$$\tilde{x}^* = \tilde{x} + \varepsilon\Delta x + o(\varepsilon), \quad \Delta x \in \Pi. \tag{5}$$

По предположению, оптимальная траектория $x(t)$ подходит к гиперповерхности Ω под ненулевым углом, а потому

$$(\sigma_1(\tilde{x}, t_1),\ \operatorname{grad}\Phi(\tilde{x})) \neq 0. \tag{6}$$

Из соотношений (4), (5), (3) можно заключить, что

$$\Delta x = \Delta_1 x + \Delta t\sigma_1(\tilde{x}, t_1), \tag{7}$$

откуда, благодаря (5) и (6), получаем

$$\Delta t = -\frac{(\Delta_1 x, \operatorname{grad}\Phi(\tilde{x}))}{(\sigma_1(\tilde{x}, t_1), \operatorname{grad}\Phi(\tilde{x}))}. \tag{8}$$

Легко подсчитать, какой путь проходит изображающая точка за время между моментами $\tilde{t}$ и t_1, двигаясь по закону (2_2):

$$x_2^*(t_1) - x_2^*(\tilde{t}) = x_2^*(t_1) - \tilde{x} = -\varepsilon\Delta t\sigma_2(\tilde{x}, t_1) + o(\varepsilon).$$

Отсюда, привлекая соотношения (4), (5), (7), (8), находим, что $\Delta_2 x = \Delta x - \Delta t\sigma_2(\tilde{x}, t_1)$, а потому

$$\Delta_2 x = \Delta_1 x + \frac{(\Delta_1 x, \operatorname{grad}\Phi(\tilde{x}))}{(\sigma_1(\tilde{x}, t_1), \operatorname{grad}\Phi(\tilde{x}))}[\sigma_2(\tilde{x}, t_1) - \sigma_1(\tilde{x}, t_1)].$$

Лемма 1. *При выполнении сформулированных выше предположений векторы $\Delta_1 x$ и $\Delta_2 x$ связаны соотношением*

$$\Delta_2 x = P\Delta_1 x; \tag{9}$$

здесь P: $R^{n+1} \to R^{n+1}$ — оператор, действующий по закону

$$\xi \to \xi + \frac{(\xi, \operatorname{grad}\Phi(\tilde{x}))}{(\sigma_1(\tilde{x}, t_1), \operatorname{grad}\Phi(\tilde{x}))} e,$$

где $e = \sigma_2(\tilde{x}, t_1) - \sigma_1(\tilde{x}, t_1)$.

4. Уравнения в вариациях. Рассмотрим теперь систему уравнений в вариациях соответствующую решению $x_i(t)$, $t_{i-1} \leqslant t \leqslant t_i$, $i = 1, 2$, уравнения (2_i):

$$\delta\dot{x}_i = A_i(t)\delta x_i, \quad A_i(t) = \left(\frac{\partial\sigma_i^\alpha(x_i(t), t)}{\partial x^\beta}\right). \tag{10_i}$$

Решением этой системы назовем всякую функцию $\delta x(t)$, определенную на отрезке $[\theta_*, \theta^*] \subset [t_0, t_2]$ и обладающую следующими свойствами:

1) функция $\delta x(t)$ удовлетворяет уравнению (10_1) на $[\theta_*, \theta^*] \cap \cap [t_0, t_1)$ и уравнению (10_2) на $[\theta_*, \theta^*] \cap (t_1, t_2]$;

2) если $t_1 \in (\theta_*, \theta^*)$, то функция $\delta x(t)$ удовлетворяет в этой точке соотношению $\delta x(t_1 + 0) = P\,\delta x(t_1 - 0)$.

Лемма 2. *Для варьированной траектории имеет место представление* $x^*(t) = x(t) + \varepsilon\,\delta x(t) + o(\varepsilon)$, *справедливое на всем отрезке* $t_0 \leqslant t \leqslant t_2$ *за исключением интервалов варьирования и интервала длины* $O(\varepsilon)$ *с центром в точке* t_1. *При этом функция* $\delta x(t)$ *является решением системы* (10_i) *на каждом отрезке, которые получаются из отрезка* $[t_0, t_2]$ *выбрасыванием интервалов варьирования, а ее значения в концах интервала варьирования, соответствующего параметрам* τ, v, l, *связаны соотношением*

$$\delta x(\tau) = \delta x(\tau - \varepsilon l) + l(v - \dot{x}(\tau)).$$

Лемма 3. *Имеет место формула*

$$x^*(t_2 + \varepsilon\delta t) = x(t_2) + \varepsilon\delta t\sigma_2(x_2, t_2) + \varepsilon\delta x(t_2) + o(\varepsilon).$$

5. Условие скачка. Полученная в лемме 3 формула позволяет для доказательства принципа максимума провести рассуждения, аналогичные известной схеме (см. ([2]), стр. 386—391). Участвующая в этих рассуждениях функция $\psi(t)$ на отрезке $t_{i-1} \leqslant t \leqslant t_i$ должна удовлетворять системе (10_i^*), сопряженной системе (10_i), и ее скалярное произведение с любым решением $\delta x(t)$ системы (10_i) должно быть постоянно на общем отрезке определения этих функций.

Поскольку решение $\delta x(t)$ системы (10_i) (область определения которого содержит точку t_1) разрывно в точке t_1, то естественно ожидать, что и решение $\psi(t)$ системы (10_i^*) должно быть разрывно в этой точке. Нужно подобрать условия разрыва (условия скачка) функции $\psi(t)$ в точке t_1 так, чтобы обеспечить выполнение равенства $(\psi(t), \delta x(t)) \equiv \mathrm{const}$. Ясно, что условие скачка должно быть выведено из соотношения

$$(\psi(t_1 - 0), \delta x(t_1 - 0)) = (\psi(t_1 + 0), \delta x(t_1 + 0)),$$

справедливого для любого решения $\delta x(t)$ системы (10_i).

Лемма 4. *Пусть* $\psi(t)$ — *решение системы* (10_i^*), *непрерывное на полуинтервалах* $[t_0, t_1)$ *и* $(t_1, t_2]$ *и удовлетворяющее в точке* t_1 *условию скачка*

$$\psi(t_1 - 0) = P^*\psi(t_1 + 0); \tag{11}$$

здесь $P^*\colon R^{n+1^*} \to R^{n+1^*}$ — *оператор, сопряженный к* P, *т. е. действующий по закону*

$$\xi^* \to \xi^* + \frac{(\xi^*, e)}{(\sigma_1(\tilde{x}, t_1), \operatorname{grad}\Phi(\tilde{x}))}\operatorname{grad}\Phi(\tilde{x}),$$

где $e = \sigma_2(\tilde{x}, t_1) - \sigma_1(\tilde{x}, t_1)$.

Тогда для любого решения $\delta x(t)$ *системы* (10_i), *определенного на отрезке* $[\theta_*, \theta^*] \subset [t_0, t_2]$, *справедливо соотношение*

$$(\psi(t), \delta x(t)) = \mathrm{const} \qquad \forall t \in [\theta_*, \theta^*]. \tag{12}$$

Заметим, что начальное значение для функции $\psi(t)$ обычно задается в конечный момент t_2, так что она определяется на всем отрезке $t_2 \geqslant t \geqslant t_1$, а условие скачка (11) позволяет по вектору $\psi(t_1 + 0)$ найти вектор $\psi(t_1 - 0)$, играющий роль начального значения при построении этой функции на отрезке $t_1 \geqslant t \geqslant t_0$. Обратим внимание, что условие скачка (11) формулируется в лемме 4 как достаточное условие справедливости соотношения (12). Но легко видеть, что оно является и необходимым, если мы хотим, чтобы это соотношение было справедливо для любого решения системы (10_i).

6. Обобщение. Случай, когда оптимальная траектория пересекает s гладких гиперповерхностей (и все под ненулевыми углами) рассматривается аналогично.

7. Основной результат: необходимое условие оптимальности типа принципа максимума Понтрягина (ср. ([2]), теорема 4.11).

Теорема. *Пусть фазовое пространство* R^{n+1} *разбито гладкими гиперповерхностями* $\Phi_i(x)=0$, $i=1,\ldots,s$, *на области* E_j, $j=1,\ldots,s+1$, *в каждой из которых управляемый процесс описывается дифференциальным включением*

$$\dot{x}\in F(x),\ F(x)=F_j(x)\quad \text{при } x\in E_j.$$

Пусть, далее, $x(t)$, $t_0\leqslant t\leqslant t_{s+1}$, — *непрерывная траектория, пересекающая под ненулевыми углами эти гиперповерхности в моменты* $t_1,\ldots,t_s$, *удовлетворяющая краевым условиям* $x(t_0)\in m$, $x(t_{s+1})\in M$ *и в каждой из областей* E_j *удовлетворяющая соответствующему дифференциальному включению. Пусть, наконец,* $\sigma_j(x,t)$ — *локальное сечение, соответствующее куску* $x_j(t)$, $t_{j-1}\leqslant t\leqslant t_j$, *траектории* $x(t)$, *лежащему в области* E_j, *причем* t_j — *точки (односторонней) непрерывности производной* $\dot{x}(t)$ *и локальных сечений.*

Для оптимальности траектории $x(t)$ *необходимо существование константы* $k\leqslant 0$ *и кусочно-непрерывной функции* $\psi(t)$ *(разрывной только в точках* $t_1,\ldots,t_s$ *и удовлетворяющей на каждом отрезке* $t_{j-1}\leqslant t\leqslant t_j$ *системе, сопряженной к соответствующей системе уравнений в вариациях), удовлетворяющих следующим условиям:*

А) *условие максимума: для всех* $t\in[t_0,\ t_{s+1}]$, *кроме конечного их числа, выполнено соотношение*

$$\max_{v\in F(x(t))}(\psi(t),v)=(\psi(t),\dot{x}(t))=0;$$

Б) *условие скачка: в моменты* t_i, $i=1,\ldots,s$, *выполнено соотношение*

$$\psi(t_i-0)=\psi(t_i+0)+\mu_i\operatorname{grad}\Phi_i(x(t_i)),\tag{13}$$

$$\mu_i=\frac{(\psi(t_i+0),\ \sigma_{i+1}(x(t_i),\ t_i)-\sigma_i(x(t_i),\ t_i))}{(\sigma_i(x(t_i),\ t_i),\ \operatorname{grad}\Phi_i(x(t_i)))}\tag{14}$$

В) *условие трансверсальности: для любого вектора* w, *касательного к многообразию* m *в точке* $x(t_0)$, *и для любого вектора* W, *касательного к многообразию* M *в точке* $x(t_{s+1})$, *выполнены соотношения*

$$(\psi(t_0),w)=0,\quad (\psi(t_{s+1}),W)=kW^0;$$

Г) *условие нетривиальности: хотя бы одно из чисел* k, $\psi_0(t_{s+1})$, $\psi_1(t_{s+1}),\ldots,\psi_n(t_{s+1})$ *отлично от нуля.*

8. Замечание. Рассмотренная задача представляет обобщение примера, описанного Р. В. Гамкрелидзе (см. ([3]); стр. 338; ([4])). При этом в ([3]), стр. 328—329, доказывается лишь существование таких констант μ_i, что на соседних участках непрерывности функция $\psi(t)$ удовлетворяет соотношению вида (13), причем функция $\psi(t)$ отдельно, заново строится для каждых двух соседних кусков траектории. Правило (14), представляющее уточнение условия скачка Р. В. Гамкрелидзе, позволяет определить функцию $\psi(t)$ на всем отрезке определения опитмальной траектории.

Настоящая работа выполнена в семинаре акад. Л. С. Понтрягина по оптимальному управлению и дифференциальным играм. Автор выражает сердечную благодарность В. Г. Болтянскому за плодотворные обсуждения.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
8 VI 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. Г. Болтянский, Дифференциальные уравнения, 4, № 12, 2166 (1968). [2] В. Г. Болтянский, Математические методы оптимального управления, Изд. 2, М., 1969. [3] Л. С. Понтрягин, В. Г. Болтянский и др., Математическая теория оптимальных процессов, изд. 2, М., 1969. [4] Р. В. Гамкрелидзе, Изв. АН СССР, сер. матем., 24, № 3, 315 (1960).