Доклады Академии наук СССР
1971. Том 201, № 2

УДК 532.517.4 ***ГИДРОМЕХАНИКА***

Ю. А. БУЕВИЧ, В. Н. НИКОЛАЕВСКИЙ

УРАВНЕНИЯ ДЛЯ МОМЕНТОВ ОДНОРОДНОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ С АНИЗОТРОПИЕЙ ВИХРЕВОГО ХАРАКТЕРА

(Представлено академиком Л. И. Седовым 23 IV 1971)

Уравнения для моментных функций однородной изотропной турбулентности были получены Карманом и Хоуартом [1]. Их обобщение на осесимметрическую турбулентность было выполнено Бэтчелором [2] и Чандрасекаром [3]. Турбулентность с такой симметрией, определяемой полярным вектором средней скорости течения, реализуется, например, в потоках, проходящих сквозь проволочную сетку. В то же время в течениях, представляющих основной практический интерес (например, в следе за обтекаемым телом или в турбулентном пограничном слое), свойства статистической симметрии малых турбулентных вихрей определяются не только выделенным направлением средней скорости, но и направлением их предпочтительного вращения. Важность учета анизотропии, обусловленной наличием аксиального вектора средней угловой скорости ω_i (вообще говоря, отличной от угловой скорости поля средних поступательных скоростей), явствует также из результатов [4]: при такой анизотропии сумма кинетических моментов вихрей, содержащихся в элементарном макрообъеме, будет отлична от нуля и равна внутреннему объемному моменту. Чтобы перейти от псевдотензорных к истинным тензорным величинам, рассматриваем ниже вместо вектора ω_i антисимметричный тензор $\omega_{ij} = \varepsilon_{ijk}\omega_k$, используемый в [5], где ε_{ijk} — альтернирующий тензор, причем ограничимся здесь турбулентностью, свойства симметрии которой определяются только этим тензором.

Следуя [6], составляем скалярные произведения вида $F_{ij\ldots}\, a_i b_j \ldots$ двухточечных моментов $F_{ij\ldots}$ на единичные векторы a_i, $b_i, \ldots$ Эти скалярные произведения должны быть функциями истинных скаляров, которые можно составить из вектора r_i, соединяющего две выделенные точки, тензора ω_{ij} и векторов a_i, $b_i, \ldots$, т. е. скаляров $r^2 = r_i r_i$, $\varepsilon_{ijk}\omega_k r_j \varepsilon_{iml}\omega_l r_m = \omega_{ij}\omega_{im} r_j r_m = r_i r_i - (r_i\omega_i)^2 = r^2(1-\mu^2)$, а также скаляров типа $r_i a_i$, $\omega_{ij} r_j a_i$, $a_i b_i$, $\omega_{ij} a_i b_j$. Соответственно двухточечные моменты первого L_i, второго Q_{ij} и третьего $\Pi_{ijk} = \Pi_{jik}$ ранга выразятся в форме

$$L_i = L_0 r_i + L\omega_{ij} r_j, \quad \omega_{ij} = \varepsilon_{ijk}\omega_k, \quad \omega = \omega_k\omega_k = 1,$$

$$Q_{ij} = Q_0\delta_{ij} + Q_1 r_i r_j + Q_2\omega_{ij} + Q_3\omega_{il} r_l r_j + Q_4\omega_{jl} r_l r_i + Q_*\omega_{ik}\omega_{jm} r_k r_m, \qquad (1)$$

$$\Pi_{ijk} = \Pi_1 r_i r_j r_k + \Pi_2(r_i\delta_{jk} + r_j\delta_{ik}) + \Pi_3 r_k\delta_{ij} +$$

$$+ \Pi_4(\omega_{ik} r_j + \omega_{jk} r_i) + \Pi_5(\omega_{im} r_j + \omega_{jm} r_i) r_m r_k + \Pi_6\omega_{kl} r_l r_i r_j + \ldots,$$

причем скалярные коэффициенты L_0, L и Q_m, Π_m есть функции от r и μ^2.

Условия соленоидальности тензоров (1) по различным индексам позволяют уменьшить число скалярных функций, входящих в их определения. Введем оператор

$$\nabla_i = \frac{\partial}{\partial r_i} = r_i D_r + \omega_i D_\mu, \quad D_r = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\mu}{r^2}\frac{\partial}{\partial\mu}, \quad D_\mu = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\mu}.$$

Условие соленоидальности вектора L_i гласит

$$\nabla_i L_i = (r^2 D_r + r\mu D_\mu + 3) L_0 = (r\,\partial/\partial r + 3) L_0 = 0.$$

Отсюда и из условия ограниченности L_0 при $r \to 0,\ \infty$ следует $L_0 \equiv 0$. Поэтому наиболее общее представление для соленоидального ограниченного вектора L_i имеет вид

$$L_i = L(r,\ \mu^2)\,\omega_{ij} r_j. \tag{2}$$

Аналогично, из условий соленоидальности тензора Q_{ij} по обоим индексам получим уравнения

$$(r\partial / \partial r + 4) Q_0 + D_r Q_1 = 0, \quad D_\mu Q_0 = 0, \quad Q_* = 0,$$

$$D_\mu Q_2 + (r\partial / \partial r + 4) Q_3 + Q_4 = 0, \qquad -D_r Q_2 + Q_3 + (r\partial / \partial r + 4) Q_4 = 0.$$

Вводя величины $E = {}^1\!/_2 (Q_3 + Q_4)$, $G = {}^1\!/_2 (Q_3 - Q_4)$, получим отсюда

$$(r\partial / \partial r + 5) E = 0, \quad D_r Q_2 + (r\partial / \partial r + 3) G = 0.$$

Из приведенных уравнений и условия ограниченности сразу же следует, что Q_0, Q_1 не зависят от μ^2, а $E \equiv 0$.

Установим перестановочные соотношения, верные при любом n:

$$D_r (r\,\partial / \partial r + n) = (r\,\partial / \partial r + n + 2) D_r.$$

Из этих соотношений и условий соленоидальности тензора Q_{ij} следует, что можно ввести скалярные потенциалы Q и q, обладающие свойствами

$$Q_0 = -\frac{1}{r}\frac{\partial Q}{\partial r}, \quad Q_1 = \left(r\frac{\partial}{\partial r} + 2\right) Q, \quad Q = Q(r, t),$$

$$G = -D_r q, \quad Q_2 = \left(r\frac{\partial}{\partial r} + 1\right) q, \quad q = q(r, \mu^2, t).$$

Соответственно, имеем общее представление для ограниченного соленоидального по обоим индексам тензора Q_{ij}:

$$Q_{ij} = \delta_{ij}\left(r\frac{\partial}{\partial r} + 2\right) Q - r_i r_j \frac{1}{r}\frac{\partial Q}{\partial r} + \omega_{ij}\left(r\frac{\partial}{\partial r} + 1\right) q -$$

$$- (\omega_{il} r_j - \omega_{jl} r_i) r_l \left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\mu}{r^2}\frac{\partial}{\partial \mu}\right) q. \tag{3}$$

Аналогично можно упростить и выражение (1) для Π_{ijk}.

Далее рассмотрим корреляционные тензоры

$$L_i = \langle p u_i' \rangle, \ L_i^* = \langle u_i p' \rangle, \ Q_{ij} = \langle u_i u_j' \rangle, \ \Pi_{ijk} = \langle u_i u_j u_k' \rangle, \ \Pi_{ijk}^* = \langle u_i u_j' u_k' \rangle, \tag{4}$$

где p, p' и u_i, u_i' — значения давления и скорости в точках M, M', а $\langle\ \rangle$ — символ осреднения по ансамблю реализаций.

Предполагая, как обычно, перестановочность операций дифференцирования и усреднения по ансамблю, из уравнений Навье — Стокса для несжимаемой жидкости можно получить следующие уравнения для величин (4):

$$\begin{gathered}\nabla_i L_i = \nabla_i L_i^* = \nabla_i Q_{ij} = \nabla_j Q_{ij} = \nabla_i \Pi_{ijk}^* = \nabla_k \Pi_{ijk} = 0, \\ \partial Q_{ij} / \partial t = 2\nu \nabla_k \nabla_k Q_{ij} + S_{ij}, \quad S_{ij} = \nabla_k (\Pi_{ikj} - \Pi_{ikj}^*) + \frac{1}{\rho}(\nabla_i L_j - \nabla_j L_i^*),\end{gathered} \tag{5}$$

где ρ, ν — плотность и кинематическая вязкость жидкости соответственно. Величины (4) ограничены; отсюда и из первых уравнений (5) следует, в частности, что L_i, L_i^*, Q_{ij} могут быть представлены в формах (2) и (3) соответственно.

Отметим, что из условия однородности турбулентности следуют соотношения

$$L(\mathbf{r}) = -L^*(-\mathbf{r}), \quad Q(\mathbf{r}) = Q(-\mathbf{r}), \quad q(\mathbf{r}) = q(-\mathbf{r}). \tag{6}$$

Очевидно, тензоры S_{ij} и $\Gamma_{ij} = \nabla_k \nabla_k Q_{ij}$ в (5) также соленоидальны по обоим индексам и ограничены: поэтому они могут быть представлены через свои скалярные потенциалы S, s и Γ, γ в виде, аналогичном (3). Уместно заменить последнее уравнение (5) для тензоров Q_{ij}, Γ_{ij}, S_{ij} соответствующим уравнением для их скалярных потенциалов.

Вычислим компоненты тензора $\Gamma_{ij} = \nabla_k \nabla_k Q_{ij}$ из (3); видим, что в выражении для Γ_{ij} наряду со слагаемым того же типа, что и в (3), появляется слагаемое, пропорциональное псевдотензору $(\omega_{il}\omega_j - \omega_{jl}\omega_i) r_l$. Отсутствие такого слагаемого приводит к требованию $D_\mu q = 0$, т. е. q также не должно зависеть от μ^2. В результате получаем следующие представления для скалярных потенциалов Γ и γ:

$$\Gamma = \Delta_4 Q, \quad \gamma = \Delta_4 q, \quad \Delta_n = \frac{1}{r^n} \frac{\partial}{\partial r}\left(r^n \frac{\partial}{\partial r}\right).$$

Отсюда и из (5) получим уравнения

$$\partial Q / \partial t = 2\nu \Delta_4 Q + S, \quad \partial q / \partial t = 2\nu \Delta_4 q + s. \tag{7}$$

Величины S и s, входящие в (7), могут быть выражены через L и скалярные потенциалы тензора Π_{ijk}. Первое уравнение (7) известно как уравнение Кармана — Хоуарта для изотропной турбулентности, когда $q \equiv 0$, $s \equiv 0$. Автомодельные решения этого уравнения были получены для изотропной турбулентности на конечной стадии вырождения ([7]).

Чтобы выделить явно новые члены Q''_{ij} в Q_{ij}, обусловленные вихревой анизотропией турбулентного поля, рассмотрим компоненты Q_{ij} в системе координат, ось x_1 которой направлена перпендикулярно плоскости вращения $(\omega_i = \omega\delta_{1i} = \delta_{1i})$, а плоскость (x_1, x_2) проходит через точки M, M' $(r_i = r_1\delta_{i1} + r_2\delta_{i2})$. В этом случае компоненты Q_{ij}', зависящие от потенциала Q, совпадают с таковыми в изотропном турбулентном поле $(Q_{ij} = Q_{ij}' + Q_{ij}'')$:

$$Q'_{11} = Q_1 r_1^2 + Q_0, \quad Q'_{22} = Q_1 r_2^2 + Q_0, \quad Q'_{33} = Q_0, \quad Q'_{12} = Q_1 r_1 r_2.$$

Однако наличие рассмотренной анизотропии приводит к появлению новых корреляций

$$Q''_{13} = G\varepsilon_{321}\omega_1 r_2 r_1 = -G\omega r_1 r_2,$$
$$Q''_{23} = Q_2 \varepsilon_{231}\omega_1 = Q_2\omega, \quad Q''_{33} = 0$$

(входящие сюда скаляры выражаются через Q и q по приведенным формулам).

Заметим, что тензоры Q_{ij}, Π_{ijk} при $r = 0$ симметричны по индексам i, j, а это дает граничные условия для скаляров, определяющих антисимметрию.

Структурная функция по А. Н. Колмогорову ([8])

$$B_{ij} = \langle (u_i - u'_i)(u_j - u'_j) \rangle \tag{8}$$

может быть выражена через момент Q_{ij}. Если воспользоваться условием однородности $Q_{ij}(-\mathbf{r}) = Q_{ji}(\mathbf{r})$, а затем представлением (3), то нетрудно найти, что

$$B_{ij} = 2Q_{ij}(0) - (Q_{ij} + Q_{ji}) =$$
$$= 4(Q(0) - Q)\delta_{ij} + 2r_i r_j (1/r)(\partial Q/\partial r) - 2\delta_{ij}(\partial Q/\partial r). \tag{9}$$

При малых расстояниях r структурная функция может быть представлена в виде

$$B_{ij} = \left\langle \frac{\partial u_i}{\partial r_m} \frac{\partial u_j}{\partial r_n} \right\rangle r_m r_n = D_{ijmn} r_m r_n, \tag{10}$$

причем тензор D_{ijmn} независим от r.

Разложив $Q_{ij}(r)$ так же в ряд по r, найдем выражение

$$B_{ij} = 2\left(\frac{\partial^2 Q}{\partial r^2}\right)_0 r_i r_j - 4\left(\frac{\partial^2 Q}{\partial r^2}\right)_0 r^2 \delta_{ij}, \quad (\partial Q / \partial r)_0 = 0, \tag{11}$$

справедливое для малых r.

Отметим, что здесь рассмотрен лишь простейший вариант турбулентности с «вращательной» анизотропией. В принципе при конструировании скалярных форм $F_{ij\ldots}\, a_j b_j\ldots$ можно было бы использовать не только истинные скаляры, перечисленные выше, но также четные произведения различных псевдоскаляров вида $\omega_i r_i$, $\omega_i a_i, \ldots$

В реальных течениях существует обычно как вращательная анизотропия типа рассмотренной, так и анизотропия, связанная с появлением выделенного направления λ_i в пространстве, исследованная в ([2], [3]). В этой связи особый интерес представит распространение анализа структуры турбулентного поля на следующие два важных случая: когда направление нормально к плоскости вращения, что характерно, по-видимому, для турбулентного пограничного слоя, и когда оно лежит в плоскости вращения, что, по-видимому, характерно для турбулентного следа за обтекаемым телом.

Институт проблем механики
Академии наук СССР
Москва

Поступило
12 IV 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] T. von Karman, L. Howarth, Proc. Roy. Soc. A, **164**, 192 (1968). [2] G. K. Batchelor, Proc. Roy. Soc., A, **186**, 480 (1946). [3] S. Chandrasekhar, Phil. Trans. Roy. Soc. London, A, **242**, 557 (1950). [4] В. Н. Николаевский, ДАН, **184**, № 6 (1969). [5] Л. И. Седов, Механика сплошной среды, **1**, **2**, «Наука», 1970. [6] H. P. Robertson, Proc. Cambridge Phil. Soc., **36**, 209 (1940). [7] Л. И. Седов, ДАН, **42**, в. 3, 121 (1944). [8] А. Н. Колмогоров, ДАН, **30**, № 4 (1941).