Доклады Академии наук СССР
1971. Том 201, № 2

УДК 517.941.92

МАТЕМАТИКА

Академик Н. Н. КРАСОВСКИЙ

ПРОГРАММНОЕ ПОГЛОЩЕНИЕ В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИГРАХ

Статья примыкает к исследованиям ([1-16]). Рассмотрим игровую задачу сближения — уклонения для движения $x[t]$, описываемого уравнением

$$\dot{x} = f(t, x, u, v), \quad x[t_0] = x_0, \tag{1}$$

где u и v суть управляющие воздействия первого и второго игроков, стесненные условиями $u \in \mathscr{P}$, $v \in \mathscr{Q}$, причем $\mathscr{P}$ и $\mathscr{Q}$ суть компактны. Цель первого игрока — обеспечить встречу фазовой точки $x[t]$ с замкнутым множеством $\mathscr{M}$, цель второго игрока — воспрепятствовать этому. В соответствии с ([14-16]) определим стратегию $U \div \mathscr{U}(t, x)$ как функцию, которая позиции $\{t, x\}$ ставит в соответствие множество $\mathscr{U}(t, x) \subset \mathscr{P}$, смешанную стратегию $\tilde{U} \div \tilde{\mathscr{U}}(t, x)$ определим как функцию $\{t, x\} \to \tilde{\mathscr{U}}$, где $\tilde{\mathscr{U}}(t, x)$ есть множество $\{\mu(du)\}$, составленное из мер $\mu(du)$, нормированных на $\mathscr{P}$. Аналогичным образом определяются стратегии $V \div \mathscr{V}(t, x)$ и смешанные стратегии $\tilde{V} \div \tilde{\mathscr{V}}(t, x) = \{\nu(dv)\}$. Движения $x[t, t_*, x_*, U]$ или $x[t, t_*, x_*, \tilde{U}]$ определяются ([14], [16]) как пределы ломаных $x_\Delta[t, t_*, x_*^\Delta]$, которые удовлетворяют контингенциям $\dot{x}_\Delta[t] \in \mathscr{F}_Q(t, x_\Delta[t], u[\tau_k])$, $u[\tau_k] \in \mathscr{U}(\tau_k, x_\Delta[\tau_k])$ или контингенциям $\dot{x}_\Delta[t] \in \mathscr{F}_Q(t, x_\Delta[t], \mu(du)_{\tau_k})$, $\mu(du)_{\tau_k} \in \tilde{\mathscr{U}}(\tau_k, x_\Delta[\tau_k])$ при $\tau_k \leqslant t < \tau_{k+1}$, где $\tau_0 = t_*$, $\tau_{k+1} - \tau_k \leqslant \Delta$, $\Delta \to 0$, $x_*^\Delta \to x_*$ и $\mathscr{F}_Q = \overline{\mathrm{co}}\{f(t, x, u, v)\}$ или $\mathscr{F}_Q = \overline{\mathrm{co}}\{\int f(t, x, u, v)\,\mu(du)\}$ при $v \in \mathscr{Q}$. Аналогичным образом определяются движения $x[t, t_*, x_*, V]$ или $x[t, t_*, x_*, \tilde{V}]$. Стратегия U и $\tilde{U}$ обеспечивает встречу к моменту ϑ (в момент ϑ), если всякое движение $x[t, t_0, x_0, U]$ или $x[t, t_0, x_0, \tilde{U}]$ попадает на $\mathscr{M}$ хотя бы один раз при $t \in [t_0, \vartheta]$ (при $t = \vartheta$). Стратегия V или $\tilde{V}$ обеспечивает уклонение до момента ϑ (в момент ϑ), если всякое движение $x[t, t_0, x_0, V]$ или $x[t, t_0, x_0, \tilde{V}]$ не попадает на $\mathscr{M}$ при всех $t \in [t_0, \vartheta]$ (при $t = \vartheta$). В работах [14-16] на основе понятия поглощения множеств процессом (1) для липшицевой по x функции f установлена альтернатива типа седловой точки ([16]) в классе смешанных стратегий, стирающих различие между минимаксной и максиминной постановкой исходной задачи сближения и уклонения. Для их различения обсудим три понятия поглощения: минимаксное, максиминное и смешанное.

Рассмотрим собственно линейную систему

$$\dot{x} = A(t)x + f(t, u, v), \tag{2}$$

где функции $A(t)$ и $f(t, u, v)$ непрерывны. Пусть $\mathscr{M}$ — некоторое выпуклое ограниченное замкнутое множество.

В соответствии с ([15], [16]) будем говорить, что из позиции $\{t_*, x_*\}$ процесс (2) в момент $\vartheta > t_*$ поглощает множество $\mathscr{M}$ программно по максимину (по смешению), если для любой стратегии $V \div v(t)$ ($\tilde{V} \div \tilde{\mathscr{V}}(t)$) по крайней мере одно движение $x[t, t_*, x_*, V]$ ($x[t, t_*, x_*, \tilde{V}]$) попадает на $\mathscr{M}$ при $t = \vartheta$.

Пусть $\mathscr{V}(t, u)$ — функция, которая всякой паре t и $u \in \mathscr{P}$ ставит в соответствие множество $\mathscr{V}(t, u) \subset \mathscr{Q}$ и пусть $\mathscr{F}_{\mathscr{V}}(t) = \overline{\mathrm{co}}\{f(t, u, v)\}$ при $v \in \mathscr{V}(t, u)$, $u \in \mathscr{P}$. Допустим только такие $\mathscr{V}(t, u)$, для которых система множеств $\mathscr{F}_{\mathscr{V}}(t)$ по t полунепрерывна сверху по включению. Скажем, что из позиции $\{t_*, x_*\}$ процесс (2) поглощает $\mathscr{M}$ программно по минимаксу, если для любой функции $\mathscr{V}(t, u)$ по крайней мере одно движение $x[t, t_*, x_*, \mathscr{V}]$, определенное как решение уравнения в контингенциях $\dot{x}[t] \in A(i)x[t] + \mathscr{F}_{\mathscr{V}}(t)$, попадает на $\mathscr{M}$ при $t = \vartheta$.

Пусть $\mathscr{M}_\varepsilon$ — замкнутая эвклидова ε-окрестность множества $\mathscr{M}$ и пусть $\varepsilon^{(i)}(t_*, x_*)$ — нижняя грань тех $\varepsilon \geqslant 0$, для которых процесс (2) программно поглощает $\mathscr{M}_\varepsilon$ ($(i = 1)$ — по максимину, $(i = 2)$ — по смешению, $(i = 3)$ — по минимаксу). Как и для линейной системы в ([15]), здесь (с понятными изменениями) проверяется, что

$$\varepsilon^{(i)}(t, x) = \max_{||l||=1} [\rho^{(i)}(t, \vartheta, l) - \varkappa(l) + l'X(\vartheta, t)x], \tag{3}$$

если правая часть неотрицательна, иначе $\varepsilon^{(i)}(t, x) = 0$ (штрих означает транспонирование). Здесь

$$\rho^{(i)}(t, \vartheta, l) = \Gamma_i \left[\int_t^\vartheta l'X(\vartheta, \tau) f(\tau, u(\tau), v(\tau))\, d\tau\right] \quad (i = 1, 3),$$

$$\rho^{(2)}(t, \vartheta, l) = \Gamma_2 \left[\int_t^\vartheta l' \int\int X(\vartheta, \tau) f(\tau, u, v)\, \mu(du)_\tau \nu(dv)_\tau\, d\tau\right],$$

$$\varkappa(l) = \max l'p \quad \text{при} \quad p \in \mathscr{M};$$

$X(t, \tau)$ — фундаментальная матрица уравнения $\dot{x} = Ax$.

Если при $\varepsilon^{(i)} > 0$ максимум в (3) достигается всякий раз на единственном векторе l (функция $\varkappa - \rho$ выпукла), т. е. если случай **регулярен** ([15]), то функция $\varepsilon^{(i)}(t, x)$ в области $\varepsilon^{(i)} > 0$ дифференцируема и удовлетворяет уравнению динамического программирования

$$\Gamma_i \left(\frac{d\varepsilon^{(i)}(t, x[t])}{dt}\right) = 0, \tag{4}$$

где символ Γ_i обозначает следующие операции:

$$(i = 1) \div \max_v \min_u, \quad (i = 2) \div \max_\nu \min_\mu, \quad (i = 3) \div \min_u \max_v.$$

Система множеств $\mathscr{V}^0(t, x)$ из тех v, для которых при $i = 1$ достигается максимум (4) (если $\varepsilon^{(1)}(t, x) > 0$, иначе $\mathscr{V}^0 = Q$), определяет стратегию V^0, обеспечивающую максимин

$$\max_V \min_{x[t]} \omega(\mathscr{M}, x[\vartheta, t_0, x_0, V]) = \min_{x[t]} \omega(\mathscr{M}, x[\vartheta, t_0, x_0, V^0]).$$

Здесь $\omega(\mathscr{M}, x)$ — расстояние от $\mathscr{M}$ до x.

Системы множеств $\widetilde{\mathscr{U}}^*(t, x)$ и $\widetilde{\mathscr{V}}^*(t, x)$ тех μ и ν, на которых при $i = 2$ осуществляется седловая точка (4) если $\varepsilon^{(2)}(t, x) > 0$, иначе $\widetilde{\mathscr{U}}^*$ и $\widetilde{\mathscr{V}}^*$ складываются из всех $\mu(du)$ и $\nu(dv)$), определяет стратегии $\widetilde{U}^*$ и $\widetilde{V}^*$, обеспечивающие седловую точку

$$\max_{\widetilde{V}} \min_{x[t]} \omega(\mathscr{M}, x[\vartheta, t_0, x_0, \widetilde{V}]) = \min_{\widetilde{U}} \max_{x[t]} \omega(\mathscr{M}, x[\vartheta, t_0, x_0, \widetilde{U}]).$$

Система множеств $\mathscr{U}_0(t, x)$ из тех u, для которых при $i = 3$ достигается минимум (4) (если $\varepsilon^{(3)}(t, x) > 0$, иначе $\mathscr{U}_0 = \mathscr{P}$), определяет стратегию U_0, обеспечивающую минимакс

$$\min_U \max_{x[t]} \omega(\mathscr{M}, x[\vartheta, t_0, U]) = \max_{x[t]} \omega(\mathscr{M}, x[\vartheta, t_0, x_0, U_0]).$$

Отсюда следует, что в регулярном случае стратегия U_0 обеспечивает встречу $x(t)$ с $\mathscr{M}$ в момент ϑ (и тем более к моменту ϑ), если $x_0 \in \mathscr{W}_1^{\mathrm{I}}(t_0, \vartheta)_0$, где $\mathscr{W}_1^{\mathrm{I}}(t_0, \vartheta)_0$ — множество **минимаксного про-**

граммного поглощения, т. е. множество тех x, для которых процесс (2) поглощает $\mathscr{M}$ в момент ϑ программно по минимаксу в момент ϑ.

В общем случае (1) стратегия $U_0 \div \mathscr{U}_0(t, x)$, разрешающая задачу сближения с $\mathscr{M}$ в момент ϑ (к моменту ϑ) строится как экстремальная ([14–16]) стратегия к множествам минимаксного позиционного поглощения в момент ϑ (к моменту ϑ) $\mathscr{W}_4^{\mathrm{I}}(t, \vartheta)_0$ ($\mathscr{W}_4^{\mathrm{II}}(t, \vartheta)_0$), которые определяются и изучаются по аналогии с такими же множествами $\mathscr{W}_4^{(i)}(t, \vartheta)$ позиционного поглощения ([16]). При этом только для $\mathscr{W}_4^{(i)}(t, \vartheta)_0$ в основу кладутся свойства, отвечающие уже минимаксному программному поглощению (с понятной его модификацией для поглощения к моменту ϑ, где это надо). Так, $x_* \in \mathscr{W}_4^{\mathrm{I}}(t, \vartheta)_0$ ($x_* \in \in \mathscr{W}_4^{\mathrm{II}}(t,\vartheta)_0$) тогда и только тогда, когда никакая стратегия $V_u \div \div \mathscr{V}(t, x, \tau, u)$ не может обеспечить уклонение $x[t]$ от $\mathscr{M}$ в момент ϑ (к моменту ϑ). Движения $x[t, t_*, x_*, V_u]$ суть пределы ломаных $x_\Delta[t]$, удовлетворяющих при $\tau_k \leqslant t < \tau_{k+1}$ контингенциям $\dot{x}_\Delta[t] \in \mathscr{F}_{\mathscr{P},\mathscr{V}}\ (t, x_\Delta[t])$, где $\mathscr{F}_{\mathscr{P},\mathscr{V}}\ (t, x) = \overline{\mathrm{co}}\{f(t, x, u, v)\}$ при $v \in \mathscr{V}(\tau_k, x_\Delta[\tau_k], t, u)$ и $u \in \mathscr{P}$. По аналогии с $\mathscr{W}_4^{(i)}(t, \vartheta)$ из ([16]) множества $\mathscr{W}_4^{(i)}(t, \vartheta)_0$ минимаксно (при $i = = 1$ сильно) u-стабильны и их также можно конструировать предельным переходом от дискретной попятной процедуры ([16]). Только в отличие от ([16]) смешанное программное поглощение на полуинтервалах $\tau_k \leqslant t < \tau_{k+1}$ заменяется здесь на такое же минимаксное поглощение. Таким образом, общий случай игры сближения — уклонения для движения (1) характеризуется тремя множествами $\mathscr{W}_4^{\mathrm{II}}(t, \vartheta)_0 \subset \mathscr{W}_4^{\mathrm{II}}(t, \vartheta) \subset \subset \mathscr{W}_4^{\mathrm{II}}(t, \vartheta)^0$ (точка x_* принадлежит множеству $\mathscr{W}_4^{\mathrm{II}}(t, \vartheta)^0$ максиминного позиционного поглощения к моменту ϑ тогда и только тогда, когда никакая стратегия $V \div \mathscr{V}(t, x)$ не может обеспечить уклонение $x[t]$ от $\mathscr{M}$ к моменту ϑ).

Справедливо утверждение: *если* $x_0 \in \mathscr{W}_4^{(i)}(t_0, \vartheta)_0$, *то некоторая стратегия* $U_0 \div \mathscr{U}_0(t, x)$ *обеспечивает встречу; если* $x_0 \notin \mathscr{W}_4^{(i)}(t_0, \vartheta)_0$, *то некоторая стратегия* $V_u \div \mathscr{V}_4(t, x, \tau, u)$ *обеспечивает уклонение; если* $x_0 \in \in \mathscr{W}_4^{(i)}(t_0, \vartheta)$, *то некоторая стратегия* $\tilde{U} \div \tilde{\mathscr{U}}(t, x)$ *обеспечивает встречу; если* $x_0 \notin \mathscr{W}_4^{(i)}(t_0, \vartheta)$, *то некоторая стратегия* $\tilde{V} \div \tilde{\mathscr{V}}(t, x)$ *обеспечивает уклонение; если* $x_0 \notin \mathscr{W}_4^{(i)}(t_0, \vartheta)^0$, *то некоторая стратегия* $V^0 \div \mathscr{V}^0(t, x)$ *обеспечивает уклонение; если* $x^0 \notin \mathscr{W}^{(i)}(t_0, \vartheta)^0$, *то некоторая стратегия* $U_{\mathscr{V}} \div \mathscr{U}_{\mathscr{V}}(t, x, \tau, v)$ *обеспечивает встречу* (*при* $i = 1$ *в момент* ϑ, *при* $i = 2$ *к моменту* ϑ). *Если при всех* t, x *и* s *величина* $s'f(t, x, u, v)$ *имеет седловую точку, то множества* $\mathscr{W}_0$, $\mathscr{W}$ *и* $\mathscr{W}^0$ *совпадают.*

Институт математики и механики
Академии наук СССР
Свердловск

Поступило
5 VII 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] W. H. Fleming, J. Math. Anal. Appl., 3, 102 (1961). [2] C. R. Nardzewski, Adv. in Game Theory, Ann. Math. Studies, 1964, p. 113. [3] R. Isaacs, Differential Games, № 4, 1965. [4] Л. С. Понтрягин, ДАН, 175, № 4, 764 (1967). [5] Б. Н. Пшеничный, ДАН, 184, № 2, 285 (1969). [6] E. Roxin, J. Optimization Theory Appl., 3, № 3, 153 (1969). [7] P. Varayia, I. Lin, SIAM. J. Control, 7, № 1, 141 (1969). [8] Н. Н. Петров, ДАН, 190, № 6, 1289 (1970). [9] A. Friedman, J. Diff. Equations, 7, № 1, 92 (1970). [10] Л. С. Понтрягин, Е. Ф. Мищенко, ДАН, 189, № 4, 721 (1969). [11] М. С. Никольский, П. Б. Гусятников, ДАН, 184, № 3, 518 (1969). [12] Э. Р. Смольяков, ДАН, 191, № 1, 39 (1970). [13] Р. П. Федоренко, Журнал вычислит. матем. и матем. физ., 10, № 5, 1116 (1970). [14] Н. Н. Красовский, А. И. Субботин, ДАН, 190, № 3, 532 (1970). [15] Н. Н. Красовский, Игровые задачи о встрече движений, М., 1970. [16] Н. Н. Красовский, А. И. Субботин, ДАН, 196, № 2, 278 (1971).