Ю. А. Гришечкин, В. Н. Капшай
Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины,
г. Гомель, Республика Беларусь

ПРИБЛИЖЁННОЕ АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ГРОССА С ЛИНЕЙНЫМ В РЕЛЯТИВИСТСКОМ КОНФИГУРАЦИОННОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ ПОТЕНЦИАЛОМ

В работе получены решения уравнения Гросса, описывающего связанные состояния систем двух скалярных частиц одинаковой массы в сферически-симметричном случае для линейного потенциала в релятивистском конфигурационном представлении (РКП):

$$V(r) = \lambda r\,, \tag{1}$$

где $\lambda > 0$ – константа связи;
$r \geq 0$ – модуль радиус-вектора в РКП. Уравнение имеет следующий вид [1]:

$$\psi(2E, r) = \int_0^\infty dr'\, G(E, r, r') V(r')\, \psi(2E, r')\,, \tag{2}$$

где $\psi(2E, r)$ – волновая функция;
$2E > 2m$ – энергия системы двух частиц;
m – масса каждой частицы;
$G(E, r, r')$ – функция Грина [1]:

$$G(E, r, r') = \frac{-i}{m\,\mathrm{sh}\,2\chi}\left\{\frac{\mathrm{sh}\left[\left(\pi + i\chi\right) m(r - r')\right]}{\mathrm{sh}\,\pi\, m(r - r')} - \frac{\mathrm{sh}\left[\left(\pi + i\chi\right) m(r + r')\right]}{\mathrm{sh}\,\pi\, m(r + r')}\right\}, \tag{3}$$

где величина $\chi > 0$ связана с энергией $2E$ по формуле $2E = 2m\,\mathrm{ch}\chi$.
Будем искать решение интегрального уравнения (2) в форме

$$\psi(2E, r) = \int_{-\sigma - i\infty}^{-\sigma + i\infty} dz \exp(mr\,z)\, \varphi(2E, z)\,, \tag{4}$$

где $\varphi(2E, z)$ – неизвестная функция, величина $\sigma > 0$ – некоторая константа. Подставим (4) и (1) в уравнение (2) и после несложных преобразований приведём полученное равенство в следующем виде:

$$\begin{aligned}
&\int_{-\sigma - i\infty}^{-\sigma + i\infty} dz \exp(mr\,z)\, \varphi(2E, z) = \\
&= \frac{\lambda}{m}\int_{-\sigma - i\infty}^{-\sigma + i\infty} dz\, \varphi(2E, z) \frac{\partial}{\partial z}\int_0^\infty dr' \exp(mr'\,z)\, G(2E, r, r')\,.
\end{aligned} \tag{5}$$

Интеграл по переменной r' в (5) может быть вычислен точно. Кратко опишем процедуру вычисления. Представим функцию Грина в виде интегрального выражения [1]

$$G(E,r,r')=-\frac{2m}{\pi}\int_0^\infty d\chi_p \sin(\chi_p mr)\, g(E,m\,\mathrm{sh}\,\chi_p)\sin(\chi_p m r'), \tag{6}$$

где введено обозначение

$$g(E,p)=\left[2E\left(\sqrt{m^2+p^2}-E-i0\right)\right]^{-1}. \tag{7}$$

В результате получим двойной интеграл по переменным r' и χ_p. Вычисление интеграла по переменной r' не является теперь сложной задачей. После нахождения его значения преобразуем интеграл по переменной χ_p к интегралу по замкнутому контуру на комплексной плоскости и применим для его вычисления теорему Коши о вычетах [2]. Количество полюсов подынтегрального выражения, лежащих внутри контура, бесконечно, поэтому результат вычисления интеграла является рядом:

$$\int_0^\infty dr' \exp(mr'z)\,G(E,r,r')=-\exp(mrz)\,g\left(E,m\,\mathrm{sh}(iz)\right)+$$

$$+\frac{2}{m^2\,\mathrm{sh}\,2\chi}\sum_{s=0}^{\infty}\left[\frac{t_{0s}^{(-)}\exp(it_{0s}^{(-)}mr)}{\left(t_{0s}^{(-)}\right)^2+z^2}-\frac{t_{0s}^{(+)}\exp(i\,t_{0s}^{(+)}mr)}{\left(t_{0s}^{(+)}\right)^2+z^2}\right], \tag{8}$$

где $t_{0s}^{(+)}=\chi+i\,0+2i\,\pi\,s$; $t_{0s}^{(-)}=2\,i\,\pi-\chi-i\,0+2i\,\pi\,s$, $s=0,1,2,\ldots$.

Подставим правую часть выражения (8) в равенство (5) и выполним в нём интегрирование по частям. В результате получим

$$\int_{-\sigma-i\infty}^{-\sigma+i\infty} dz\exp(mr\,z)\,\varphi(2E,z)=\frac{\lambda}{m}\varphi(2E,z)\Big\{-\exp(m\,r\,z)\,g\left(E,m\,\mathrm{sh}(i\,z)\right)+$$

$$+\frac{2}{m^2\,\mathrm{sh}\,2\chi}\sum_{s=0}^{\infty}\left[\frac{t_{0s}^{(-)}\exp(it_{0s}^{(-)}mr)}{\left(t_{0s}^{(-)}\right)^2+z^2}-\frac{t_{0s}^{(+)}\exp(it_{0s}^{(+)}mr)}{\left(t_{0s}^{(+)}\right)^2+z^2}\right]\Bigg\}\Bigg|_{-\sigma-i\infty}^{-\sigma+i\infty}+$$

$$+\frac{\lambda}{m}\int_{-\sigma-i\infty}^{-\sigma+i\infty} dz\exp(mr\,z)\,g\left(E,m\,\mathrm{sh}(iz)\right)\frac{\partial}{\partial z}\varphi(2E,z)- \tag{9}$$

$$-\frac{\lambda}{m}\frac{2}{m^2\,\mathrm{sh}\,2\chi}\int_{-\sigma-i\infty}^{-\sigma+i\infty} dz\sum_{s=0}^{\infty}\left[\frac{t_{0s}^{(-)}\exp(it_{0s}^{(-)}mr)}{\left(t_{0s}^{(-)}\right)^2+z^2}-\frac{t_{0s}^{(+)}\exp(it_{0s}^{(+)}mr)}{\left(t_{0s}^{(+)}\right)^2+z^2}\right]\frac{\partial}{\partial z}\varphi(2E,z).$$

Потребуем теперь выполнение двух условий

$$\varphi(2E,z)\Big\{-\exp(mr\,z)g\left(E,m\operatorname{sh}(iz)\right) +$$

$$+\ \frac{2}{m^2\operatorname{sh}2\chi}\sum_{s=0}^{\infty}\left[\frac{t_{0s}^{(-)}\exp(it_{0s}^{(-)}mr)}{\left(t_{0s}^{(-)}\right)^2+z^2}-\frac{t_{0s}^{(+)}\exp(it_{0s}^{(+)}mr)}{\left(t_{0s}^{(+)}\right)^2+z^2}\right]\Bigg\}\Bigg|_{-\sigma-i\infty}^{-\sigma+i\infty}=0, \tag{10}$$

$$\int_{-\sigma-i\infty}^{-\sigma+i\infty}dz\sum_{s=0}^{\infty}\left[\frac{t_{0s}^{(-)}\exp(it_{0s}^{(-)}mr)}{\left(t_{0s}^{(-)}\right)^2+z^2}-\frac{t_{0s}^{(+)}\exp(it_{0s}^{(+)}mr)}{\left(t_{0s}^{(+)}\right)^2+z^2}\right]\frac{\partial}{\partial z}\varphi(2E,z)=0\,. \tag{11}$$

Равенство (9) с учётом условий (10), (11) выполняется, если справедливо дифференциальное уравнение

$$\varphi(2E,z)=\frac{\lambda}{m}\,g\left(E,m\ \operatorname{sh}(iz)\right)\frac{\partial}{\partial z}\varphi(2E,z)\,. \tag{12}$$

Общее решение уравнения (12) с учётом явного вида функции (7) представим в форме

$$\varphi(2E,z)=\varphi_0\exp\left(2\frac{m^3\operatorname{ch}\chi}{\lambda}\left(\sin z-\operatorname{ch}(\chi)\,z\right)\right), \tag{13}$$

где φ_0 – неопределённая константа. Нетрудно убедится, что функция (13) удовлетворяет условию (10). С учётом уравнения (12) приведём (11) в следующем виде:

$$\int_{-\sigma-i\infty}^{-\sigma+i\infty}dz\sum_{s=0}^{\infty}\left[\frac{t_{0s}^{(-)}\exp(it_{0s}^{(-)}mr)}{\left(t_{0s}^{(-)}\right)^2+z^2}-\frac{t_{0s}^{(+)}\exp(it_{0s}^{(+)}mr)}{\left(t_{0s}^{(+)}\right)^2+z^2}\right]\frac{\varphi(2E,z)}{g\left(2E,m\operatorname{sh}(iz)\right)}=0\,. \tag{14}$$

Преобразуем равенство (14) к виду

$$\int_{-\sigma-i\infty}^{-\sigma+i\infty}dz\sum_{s=0}^{\infty}\Bigg[\left(\frac{g^{-1}\left(2E,m\operatorname{sh}(iz)\right)}{t_{0s}^{(-)}-iz}+\frac{g^{-1}\left(2E,m\operatorname{sh}(iz)\right)}{t_{0s}^{(-)}+iz}\right)\exp(i\,t_{0s}^{(-)}mr)-$$

$$-\left(\frac{g^{-1}\left(2E,m\operatorname{sh}(iz)\right)}{t_{0s}^{(+)}-iz}+\frac{g^{-1}\left(2E,m\operatorname{sh}(iz)\right)}{t_{0s}^{(+)}+iz}\right)\exp(it_{0s}^{(+)}mr)\Bigg]\,\varphi(2E,z)=0\,. \tag{15}$$

Представим функцию $g^{-1}\left(2E,m\operatorname{sh}(iz)\right)$ в форме рядов по степеням $(t_{0s}^{(-)}-iz)$, $(t_{0s}^{(-)}+iz)$, $(t_{0s}^{(+)}-iz)$, $(t_{0s}^{(+)}+iz)$. Учитывая явный вид функции (7), получим выражения

$$g^{-1}\left(2E,m\operatorname{sh}(iz)\right)=m^2\operatorname{sh}(2\chi)(t_{0s}^{(-)}\pm iz)+m^2\operatorname{ch}^2\chi\,(t_{0s}^{(-)}\pm iz)^2+\ldots;$$

$$g^{-1}\left(2E,m\operatorname{sh}(iz)\right)=-m^2\operatorname{sh}(2\chi)(t_{0s}^{(+)}\pm iz)+m^2\operatorname{ch}^2\chi(t_{0s}^{(+)}\pm iz)^2-\ldots. \tag{16}$$

Ограничившись в (16) только первыми двумя слагаемыми, подставим их в числители дробей с соответствующими знаменателями в подынтегральном выражении равенства (15), в результате получим следующее приближённое равенство:

$$2\sum_{s=0}^{\infty}\left[\exp(it_{0s}^{(-)}mr)+\exp(it_{0s}^{(+)}mr)\right]\int_{-\sigma-i\infty}^{-\sigma+i\infty}dz\,\varphi(2E,z)\approx 0\,. \tag{17}$$

Очевидно, что множитель перед интегралом в (17) не обращается в ноль при произвольном значении переменной r. Следовательно, справедливо приближённое равенство

$$\int_{-\sigma-i\infty}^{-\sigma+i\infty}dz\,\varphi(2E,z)\approx 0\,, \tag{18}$$

которое является условием, налагаемым на величину $2E$.

Подстановка функции (13) в (4) и замена переменной $z=ix$ при $\sigma\to 0$ приводит к формуле

$$\psi(2E,r)=2i\,\varphi_0\int_0^{\infty}dx\cos\left[\left(r-(2E)^2/(2\lambda)\right)m\,x+2E\,m^2\operatorname{sh}x/\lambda\right]. \tag{19}$$

Интеграл в (19) может быть выражен через функцию Макдональда $K_\nu(z)$ [3], а волновая функция представлена в виде

$$\psi(2E,r)=2\,i\,\varphi_0\exp\left(-\frac{\pi\,m}{2}\left(r-\frac{(2E)^2}{2\lambda}\right)\right)K_{im\left(r-(2E)^2/(2\lambda)\right)}\left(\frac{2Em^2}{\lambda}\right). \tag{20}$$

Из формулы (4) следует, что условие квантования энергии (18) равносильно приближённому равенству

$$\psi(2E,0)\approx 0\,, \tag{21}$$

из которого с учётом (20) следует трансцендентное уравнение

$$K_{im(2E)^2/(2\lambda)}\left(\frac{2Em^2}{\lambda}\right)=0 \tag{22}$$

для приближённых значений энергии $2E^{(n)}$ связанных состояний, где $n=1,2,\ldots$. Таким образом, выражения (20), (22) являются приближённым решением уравнения Гросса с линейным в РКП потенциалом (1).

В таблице 1 приведены обезразмеренные значения энергии $2\varepsilon_{num}=2E_{num}/m$, найденные численным решением интегрального уравнения (2) и значения энергии $2\varepsilon_{appr}=2E_{appr}/m$, полученные численным решением приближённого трансцендентного уравнения (22). Величины энергии найдены с максимальной погрешностью 10^{-4}.

Таблица 1 – Значения обезразмеренной энергии 2ε

n	$2\varepsilon_{num}$	$2\varepsilon_{appr}$	$\Delta = \lvert 2\varepsilon_{num} - 2\varepsilon_{appr} \rvert$
$\lambda = 2,0$			
1	4,3026	4,3055	0,0029
2	5,4774	5,4788	0,0014
3	6,3126	6,3135	0,0009
4	6,9894	6,9900	0,0006
$\lambda = 4,0$			
1	5,2413	5,2478	0,0065
2	6,8343	6,8371	0,0028
3	7,9635	7,9652	0,0017
4	8,8778	8,8791	0,0009
$\lambda = 16,0$			
1	8,2350	8,2604	0,0254
2	11,1451	11,1548	0,0097
3	13,2061	13,2117	0,0056
4	14,8760	14,8798	0,0038

Насколько полученные величины энергии оказываются близкими, можно судить по приведенным в таблице значениям величин Δ. Как видно, с ростом величины константы связи λ точность значений энергии, найденных при решении уравнения (22), снижается, а с ростом номера состояния n – повышается.

Заключение. В данной работе найдены приближённые аналитические решения уравнения Гросса с линейным в релятивистском конфигурационном представлении потенциалом. Полученные волновые функции выражены через функцию Макдональда, а собственные значения энергии являются решениями трансцендентного уравнения.

Литература

1. Капшай, В. Н. Парциальные квазипотенциальные уравнения в релятивистском конфигурационном представлении / В. Н. Капшай, С. И. Фиалка // Известия ВУЗов. Физика. – 2017. – Т. 60, № 10. – С. 44–50.

2. Свешников, А. Г. Теория функций комплексной переменной / А. Г. Свешников, А. Н. Тихонов. – Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 336 с.

3. Бейтмен, Г. Высшие трансцендентные функции: в 3 т. / Г. Бейтмен, А. Эрдейи. – 2-е изд. – Москва: Наука, 1974. – Т. 2: Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены. – 296 с.