Доклады Академии наук СССР
1972. Том 202, № 5

УДК 513.731 *МАТЕМАТИКА*

Член-корреспондент АН СССР А. В. ПОГОРЕЛОВ

НЕСОБСТВЕННЫЕ ВЫПУКЛЫЕ АФИННЫЕ ГИПЕРСФЕРЫ

Несобственной афинной гиперсферой называется полная гиперповерхность в $(n+1)$-мерном эвклидовом пространстве, которая при подходящем выборе декартовой системы координат $z, x^1, x^2, \ldots, x^n$ задается уравнением вида $z=z(x^1, x^2, \ldots, x^n)$, где $z(x)$ — функция, удовлетворяющая уравнению

$$\det(\partial^2 z / \partial x^i \partial x^j) = \mathrm{const} > 0. \tag{1}$$

Теорема. *Выпуклая несобственная афинная гиперсфера является эллиптическим параболоидом.*

Эта теорема при $n=2$ доказана К. Ёргенсом ([1]), а при $n=3, 4$ — Е. Калаби ([2]). В данной работе теорема доказывается при любом n.

1. Пусть S — центр тяжести выпуклого тела T и h_1, h_2 — расстояния S от двух параллельных опорных гиперплоскостей. Тогда, как известно,

$$1/n \leqslant h_1/h_2 \leqslant n. \tag{2}$$

Пусть E — эллипсоид минимального объема с центром S, содержащий тело T. Тогда гомотетичный E относительно центра S эллипсоид с коэффициентом гомотетии $1/n^{3/2}$ содержится внутри тела T. Не ограничивая общности, можно считать, что эллипсоид E является шаром. Пусть r — его радиус. Допустим, утверждение неверно. Тогда ближайшая к S точка A_1 границы тела T находится на расстоянии, меньшем $r/n^{3/2}$. Проведем через точку A_1 опорную гиперплоскость α_1 тела T и пусть α_2 — параллельная опорная гиперплоскость. Гиперплоскость α_2 находится на расстоянии $b < r/\sqrt{n}$ от S. Легко проверяется, что эллипсоид E^1 минимального объема, с центром S, содержащий часть шара E между гиперплоскостями α_1 и α_2, имеет объем, меньший объема шара E. А это противоречит определению шара E. Утверждение доказано.

2. Пусть F: $z=z(x)$ — несобственная афинная гиперсфера. Не ограничивая общности, будем считать начало координат O лежащим на F. Обозначим через T выпуклое тело, ограниченное гиперповерхностью F. Проведем через произвольную точку S, полуоси $z>0$ гиперплоскость σ. Пусть T_σ — сечение тела T гиперплоскостью σ, а $\bar{T}_\sigma$ — его проекция на гиперплоскость $z=0$. Мы будем называть сечение тела гиперплоскостью σ центральным, если точка S является центром тяжести тела T_σ, соответственно начало координат O является центром тяжести его проекции $\bar{T}_\sigma$. Мы утверждаем, что через любую точку S полуоси $z>0$ можно провести центральное сечение.

Пусть

$$z = p_1x^1 + p_2x^2 + \ldots + p_nx^n + h$$

— уравнение гиперплоскости σ. Координаты центра тяжести тела $\bar{T}_\sigma$ являются некоторыми функциями коэффициентов уравнения σ: $x_i = f_i(p_1, p_2, \ldots, p_n, h)$, $i=1, 2, \ldots, n$. Утверждение о существовании центрального сечения эквивалентно утверждению о разрешимости системы

$$\begin{aligned} f_1(p_1, p_2, \ldots, p_n, h) &= 0,\\ f_2(p_1, p_2, \ldots, p_n, h) &= 0,\\ &\ldots\ldots\\ f_n(p_1, p_2, \ldots, p_n, h) &= 0. \end{aligned} \tag{3}$$

Пусть система (3) разрешима при $h = h_0$. Покажем, что она разрешима для всех h, достаточно близких к h_0. Проведем через точку $S_0(h_0)$ центральное сечение σ_0. Проведем еще через точку S_0 любую гиперплоскость σ, близкую к σ_0. Гиперплоскости σ и σ_0 пересекаются по некоторой $(n-1)$-мерной плоскости α. Пусть $\bar{\alpha}$ — ее проекция на гиперплоскость $z = 0$. Плоскость $\bar{\alpha}$ разбивает тело $\bar{T}_{\sigma_0}$ на части $A_1{}^0$ и $A_2{}^0$, а тело $\bar{T}_\sigma$ — соответственно на части A_1 и A_2. Так как гиперповерхность F строго выпуклая, то либо $A_1{}^0 \subset A_1$, а $A_2{}^0 \supset A_2$, либо $A_1{}^0 \supset A_1$, а $A_2{}^0 \subset A_2$. В любом случае переход от сечения σ_0 к σ дает смещение центра тяжести O. Более того, нетрудно видеть, что если dp — изменение угловых коэффициентов при переходе от σ_0 к σ, а dx — смещение центра тяжести, то $|dx| \geqslant c|dp|$, где c — положительная постоянная.

Так как $|dx| \geqslant c|dp|$, то определитель Якоби для системы (3) отличен от нуля для значений p и h, отвечающих σ_0. Отсюда следует разрешимость системы (3) для значений h, близких к h_0. Таким образом, множество ω тех точек полуоси $z \geqslant 0$, через которые можно провести центральное сечение, открыто. Совсем просто доказывается, что множество ω замкнутое. И так как оно не пусто (ему принадлежит точка O), то оно совпадает с полуосью $z \geqslant 0$. Утверждение доказано.

3. Сохраняя обозначения п. 2, обозначим через $S(h)$ точку на полуоси $z > 0$ с координатой $z = h$. Построим эллипсоид E наименьшего объема с центром в точке O, содержащий тело $\bar{T}_\sigma$. Выполним эквиафинное преобразование гиперплоскости $z = 0$ такое, чтобы построенный эллипсоид перешел в шар. Пусть r — радиус этого шара. Мы утверждаем, что существуют положительные постоянные c_1 и c_2, не зависящие от h, такие, что

$$c_1 \leqslant r^2/h \leqslant c_2. \tag{4}$$

Продолжим эквиафинное преобразование гиперплоскости $z = 0$ на все пространство, полагая $z' = z$. Это преобразование переводит гиперповерхность F в гиперповерхность F', также удовлетворяющую уравнению (1). Пусть $z = p_1x^1 + p_2x^2 + \ldots + p_nx^n + h$ — уравнение гиперплоскости σ. Подвергнем F' эквиафинному преобразованию

$$\begin{gathered} x'^1 = x^1, \quad x'^2 = x^2, \ldots, \quad x'^n = x^n, \\ z' = p_1x^1 + p_2x^2 + \ldots + p_nx^n + z. \end{gathered} \tag{5}$$

При этом получим гиперповерхность F''. Она также удовлетворяет уравнению (1). Сечение ее гиперплоскостью $z = h$ является центральным, а минимальный эллипсоид, содержащий его проекцию, есть шар. Чтобы не вводить новых обозначений, будем предполагать, что исходная гиперповерхность F уже обладает указанными свойствами. Именно, гиперплоскость σ центрального сечения, проходящего через точку $S(h)$, задается уравнением $z = h$, а эллипсоид минимального объема, содержащий тело $\bar{T}_\sigma$, есть шар.

Не ограничивая общности, будем считать, что правая часть уравнения (1) равна $+1$. Пусть M — любое борелевское множество на гиперповерхности $F : z = z(x)$. Поставим в соответствие каждой точке P из M точку гиперплоскости $z = 0$ с координатами $x^1 = p_1$, $x^2 = p_2, \ldots$, $x^n = p_n$, где $p_k = \partial z / \partial x^k$. Это отображение называется нормальным. Пусть $\widetilde{M}$ — образ множества M при нормальном отображении, а $\overline{M}$ — проекция M на гиперплоскость $z = 0$. Из уравнения (1) получаем

$$\int\limits_{\widetilde{M}} dp_1\, dp_2 \ldots dp_n = \int\limits_{\overline{M}} dx^1\, dx^2 \ldots dx^n. \tag{6}$$

Чтобы не вводить новых обозначений, будем понимать под гиперповерхностью F ту ее часть, которая расположена ниже гиперплоскости σ: $z = h$. Построим конус V с вершиной O, проектирующий область T_σ.

Нормальное изображение F покрывает нормальное изображение конуса. Нормальное изображение конуса V покрывает нормальное изображение конуса с вершиной O, проектирующего шар наименьшего радиуса с центром S, содержащий тело T_σ. Отсюда следует, что площадь нормального изображения гиперповерхности F не меньше $(h/r)^n\omega_n$, где ω_n — объем n-мерного шара. Что касается площади проекции гиперповерхности F на гиперповерхность $z=0$, то она равна площади области T_σ, а следовательно, не больше $r^n\omega_n$. Так как площадь нормального изображения гиперповерхности F равна площади ее проекции на гиперплоскость $z=0$, то получается неравенство

$$\frac{(h/r)^n\,\omega_n}{r^n\omega_n}=\left(\frac{h}{r^2}\right)^n\leqslant 1.$$

т. е. $h/r^2\leqslant 1$.

Доказательство другой части неравенства (4) аналогично. Гиперповерхность F, расположенная ниже гиперплоскости σ, имеет форму чаши. Сначала оценивается высота чаши H:

$$H\leqslant h(1+n^{3/2}).$$

Затем оценивается величина h/r^2 снизу. Для этого на отрицательной полуоси $z<0$ берется точка O' на расстоянии $2H$ от начала координат. Строится конус V^1 с вершиной O', проектирующий шар радиуса $r/n^{3/2}$ с центром O, лежащий в гиперплоскости $z=0$. Пусть F' — та часть гиперповерхности F, которая лежит внутри конуса V^1. Площадь нормального изображения F' не больше площади нормального изображения конуса V^1. Отсюда выводится оценка

$$h/r^2\geqslant 1/(4n^3(1+n^{3/2})).$$

4. Пусть $z(x)$ — выпуклое решение уравнения (1) в выпуклой области G диаметра D, удовлетворяющее на границе области G условию $z=1$. Тогда для первых производных решения при $z\leqslant 1/2$ и для вторых производных при $z\leqslant 1/4$ имеют место оценки

$$|z_\alpha|\leqslant c_1,\quad |z_{\alpha\alpha}|\leqslant c_2, \tag{7}$$

где c_1 и c_2 — постоянные, зависящие только от n, D и правой части уравнения.

Пусть $\bar{A}'$ — произвольная точка области G, A и A' — точки на гиперповерхности F: $z=z(x)$ и на гиперплоскости σ: $z=1$ соответственно, проектирующиеся в точку $\bar{A}'$. Обозначим через h' длину отрезка AA'. Построим конус V с вершиной A, проектирующий край гиперповерхности F. Площадь нормального изображения конуса V не больше площади нормального изображения гиперповерхности F, а следовательно, оценивается сверху через $\omega_n D^n$ (правая часть уравнения (1) принята равной $+1$).

Нормальное изображение конуса V является выпуклой областью. Ее граница задается уравнением

$$x=\nu h'/H(\nu),$$

где $H(\nu)$ — расстояние от точки $\bar{A}'$ до опорной плоскости области G с внешней нормалью ν. Если расстояние точки $\bar{A}'$ от границы области G равно ρ', то нормальному изображению конуса V принадлежит точка на расстоянии h'/ρ' от начала координат O. С другой стороны, нормальное изображение конуса V покрывает шар радиуса h'/D. Так как нормальное изображение конуса является выпуклой областью, то ему принадлежит конус вращения с высотой h'/ρ' и радиусом основания h'/D. Отсюда следует, что площадь нормального изображения конуса не меньше

$$\frac{1}{n}\frac{h'}{\rho'}\left(\frac{h'}{D}\right)^{n-1}\omega_{n-1}.$$

Так как площадь области G не больше $\omega_n D^n$, то получаем неравенство

$$\frac{1}{n}\frac{h'}{\rho'}\left(\frac{h'}{D}\right)^{n-1}\omega_{n-1}\leqslant\omega_n D^n.$$

Отсюда, замечая, что $|z_\alpha|_A\leqslant h'/\rho'$, получаем при $z\leqslant {}^1/_2$

$$|z_\alpha|\leqslant\frac{h'}{\rho'}\leqslant\frac{n\omega_n}{\omega_{n-1}}D^{2n-1}2^{n-1}.$$

Существование оценки для $|z_{\alpha\alpha}|$ после того, как известна оценка для $|z_\alpha|$, устанавливается в ([3]). Утверждение доказано.

5. Согласно одной из теорем работы ([2]) для доказательства нашей теоремы достаточно доказать существование априорной оценки для вторых производных функции $z(x)$, задающей аффинную гиперсферу F. Докажем существование такой оценки.

Сохраним обозначения п. 2. Не ограничивая общности, будем считать, что центральное сечение σ задается уравнением $z=h$. Этого всегда можно добиться преобразованием (4), не меняя вторых производных. Не ограничивая общности, можно считать, что эквиафинное преобразование, переводящее минимальный эллипсоид, содержащий тело $\overline{T}_\sigma$, в шар, задается формулами

$$z'=z,\quad x'^1=\lambda_1x^1,\quad x'^2=\lambda_2x^2,\ldots,\quad x'^n=\lambda_nx^n. \tag{8}$$

Это всегда можно достигнуть подходящим выбором системы координат.

Подвергнем гиперсферу F последовательно двум преобразованиям: эквиафинному преобразованию (8) и афинному преобразованию, задаваемому формулами

$$z'=z/h,\quad x'^1=x^1/r,\quad x'^2=x^2/r,\ldots,\quad x'^n=x^n/r. \tag{9}$$

Пусть $\overline{F}$ — афинная гиперсфера, полученная в результате этих преобразований из F, и $\bar z(x)$ — задающая ее функция. Функция $\bar z(x)$ удовлетворяет тоже уравнению вида (1) только с другой константой в правой части. Так как $\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n=1$, а отношение h/r^2 ограничено с обеих сторон, то правая часть уравнения для $\bar z(x)$ допускает двустороннюю оценку. Не ограничивая общности, можно считать, что правая часть уравнения для $z(x)$ и $\bar z(x)$ равна $+1$.

Вторые производные для гиперповерхностей F и $\overline{F}$ в соответствующих точках связаны соотношениями

$$\bar z_{\alpha\alpha}=\left(\frac{1}{\lambda_\alpha}\right)^2\frac{r^2}{h}z_{\alpha\alpha}. \tag{10}$$

При афинном преобразовании F в $\overline{F}$ точка O переходит в себя. Поэтому

$$\bar z_{\alpha\alpha}|_O=\left(\frac{1}{\lambda_\alpha}\right)^2\frac{r^2}{h}z_{\alpha\alpha}|_O.$$

Отсюда, принимая во внимание оценки для $\bar z_{\alpha\alpha}$, полученные в п. 4, заключаем, что коэффициенты λ_k допускают оценку снизу. После этого из условия $\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n=1$ получаем для них оценку сверху.

Двусторонние оценки для λ_α, r^2/h и оценки для $|\bar z_{\alpha\alpha}|$, полученные в п. 4, позволяют из равенства (10) сделать вывод о существовании оценок для $|z_{\alpha\alpha}|$, не зависящих от h. Что и требовалось доказать.

Физико-технический институт низких температур
Академии наук УССР
Харьков

Поступило
21 IX 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] K. Jörgens, Math. Ann., 127 (1954). [2] E. Calabi, Michigan Math. J., 5, № 2 (1958). [3] А. В. Погорелов, ДАН, 200, № 3 (1975).