Доклады Академии наук СССР
1972. Том 202, № 5

УДК 513.88+517.948

МАТЕМАТИКА

Г. В. РОЗЕНБЛЮМ

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ДИСКРЕТНОГО СПЕКТРА СИНГУЛЯРНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

(Представлено академиком В. И. Смирновым 1 VII 1971)

1. Исследование распределения собственных значений для негладких эллиптических операторов было начато М. Ш. Бирманом и М. З. Соломяком ([1], [2]) и продолжено в работах ([3–5]). В настоящей заметке приводятся дальнейшие результаты в этом направлении.

Основной результат заметки — оценки собственных чисел задачи Дирихле для уравнений вида $\lambda Au = Bu$ в произвольных областях $\Omega \subseteq R^m$. Здесь A и B — операторы, задаваемые однородными дифференциальными квадратичными формами порядков l и r при $2(l-r) < m$. Отличительной особенностью полученной оценки является ее равномерность как по отношению к рассматриваемому классу операторов, так и по отношению к области. Указанный результат получен путем усовершенствования техники кусочно-полиномиальных приближений, предложенной в ([6]).

Остальные результаты заметки представляют следствия основной теоремы об оценках и получены с помощью методики, предложенной в ([1]) и развитой в ([2]). Прежде всего мы расширяем условия, при которых для операторов рассматриваемого типа справедлива классическая формула спектральной асимптотики, и тем самым уточняем некоторые результаты ([1–3], [5]). Найденные условия в ряде важных случаев оказываются необходимыми и достаточными. Другое приложение основная теорема находит при оценках собственных чисел оператора Шредингера. В оценку входит тот же интеграл, который (при весьма ограничительных условиях на потенциал, см. ([7])) фигурирует в асимптотической формуле.

2. Вариационная постановка задач совпадает с принятой в ([2]). Пусть $\Omega \subseteq R^m$ — произвольное открытое множество, $A[u, u]$ — квадратичная форма,

$$A[u, u] = \int_\Omega \sum_{|i|=|j|=l} a_{ij}(x)\, D^i u \overline{D^j u}\, dx; \tag{1}$$

матрица $a(x) = \{a_{ij}(x)\} \in L_{1,\mathrm{loc}}$ и

$$\sum_{i,j} a_{ij}\eta_i\bar{\eta}_j \geqslant \gamma(x)\,|\eta|^2,$$

где $\gamma(x) > 0$ почти всюду в Ω, $\gamma^{-1} \in L_{1,\mathrm{loc}}$.

За область определения $D[A]$ примем пространство $C_0^\infty(\Omega)$, пополненное по метрике $A[u, u]$. В $D[A]$ рассматриваются операторы, порожденные формами порядка $r < l$ вида

$$B[u, u] = \int_\Omega \sum_{|i|=|j|=r} b_{ij}(x)\, D^i u \overline{D^j u}\, dx.$$

Из условий, накладываемых на матрицы $a(x)$ и $b(x)$, следует, что форма $B[u, u]$ вполне непрерывна в $D[A]$.

Пусть λ_n^+ $(-\lambda_n^-)$ — последовательные максимумы (минимумы) отношения форм $B[u, u] / A[u, u]$, $u \in D[A]$. Количество чисел $\lambda_n^\pm$, больших λ, обозначим $N_\pm(\lambda; A, B)$. Имеет место следующее обобщение теоремы 1 работы (2).

Теорема 1. *Пусть* $2(l-r) < m$, $b \in L_\alpha(\Omega)$, $\gamma^{-1} \in L_\beta(\Omega)$, $\alpha, \beta \geqslant 1$

$$\alpha^{-1} + \beta^{-1} = \delta^{-1} \equiv 2(l-r)m^{-1}. \qquad (2)$$

Тогда существует такая постоянная c_1, *зависящая от* m, l, r, α, β, *что для всех* $\lambda > 0$ *верна оценка*

$$N_\pm(\lambda; A, B) \leqslant c_1 \lambda^{-\delta} \| b \|_\alpha^\delta \, \| \gamma^{-1} \|_\beta^\delta. \qquad (3)$$

Особенностью этой теоремы является допущение знака равенства в (2) и независимость c_1 от области Ω.

3. Теорема 1 позволяет получить асимптотическую формулу для собственных значений в случае произвольной области.

Теорема 2. *Пусть* $b \in L_\alpha(\Omega)$, $\gamma^{-1} \in L_\beta(\Omega)$, $\alpha^{-1} + \beta^{-1} = \delta^{-1} < 1$. *Пусть также выполнено одно из следующих условий*:

а) *существует расширяющаяся последовательность открытых множеств* $\Omega_n \subset \Omega$ *такая, что* $\operatorname{mes}(\Omega \setminus \bigcup_n \Omega_n) = 0$ *и на каждом* Ω_n *матрицы* $a(x)$ *и* $a(x)^{-1}$ *ограничены*:

б) $a \in L_{\mu, \mathrm{loc}}$, $\gamma^{-1} \in L_{\nu, \mathrm{loc}}$, $\mu^{-1} + 2\nu^{-1} < \delta^{-1}$.

Тогда

$$N_\pm(\lambda; A, B) \sim \theta_\pm \lambda^{-\delta}, \qquad \theta_\pm = (2\pi)^{-m} \int_\Omega \omega_\pm(x)\, dx,$$

$$\omega_\pm(x) = \operatorname{mes}\{\xi \in R^m \colon a(x, \xi) \leqslant \pm b(x, \xi)\}, \qquad a(x, \xi) = \sum a_{ij}(x)\, \xi^{i+j}.$$

Теорема 2 обобщает теоремы 2 и 3 заметки (2); доказательство основано на этих теоремах. Отметим два частных случая теоремы 2.

Следствие 1. *Пусть* $A[u, u] = \int_\Omega |\nabla_l u|^2 dx$, $B[u, u] = \int_\Omega g(x) |u|^2 dx$, $2l < m$.

Тогда асимптотическая формула

$$N_\pm(\lambda; A, B) \sim \theta_\pm \lambda^{-m/2l} \qquad (4)$$

верна всегда, когда конечна величина

$$\theta_\pm = \theta_\pm(g) \equiv (2\sqrt{\pi})^{-m} \cdot \Gamma(m/2 + 1) \int_\Omega g_\pm(x)^{m/2l}\, dx.$$

Обратно, если имеет место формула (4), *то* $\theta_\pm(g) < \infty$ *и* $\theta_\pm = \theta_\pm(g)$.

Таким образом, для задач вида $\lambda(-\Delta)^l u = gu$, $u \in \overset{\circ}{H}{}^l(\Omega)$ при $2l < m$ установлено необходимое и достаточное условие справедливости классической спектральной асимптотики.

Следствие 2. *Пусть* $A[u, u]$ *определяется формулой* (1).

$$B[u, u] = \int_\Omega |u|^2 dx, \quad \gamma^{-1} \in L_{m/2l}(\Omega) \cap L_{\infty, \mathrm{loc}}, \; a(x) \in L_{\infty, \mathrm{loc}}, \quad 2l < m.$$

Тогда имеет место асимптотическая формула

$$N_+(\lambda; A, B) \sim (2\pi)^{-m} \int_\Omega \omega(x)\, dx \lambda^{-m/2l}, \qquad (5)$$

$$\omega(x) = \operatorname{mes}\{\xi \in R^m \colon a(x, \xi) \leqslant 1\}.$$

В случае неограниченной области Ω следствие 2 показывает, что классическая асимптотика обеспечивается за счет роста на бесконечности коэффициентов основной формы. В случае $l=1$, $\Omega=R^m$, при весьма сильных условиях, наложенных на форму A, формула (5) была получена в ([8]).

4. Теорема 1 позволяет получать оценки спектра задач, отличных от изучавшихся в п.п. 2, 3. Рассмотрим, например, уравнение Шредингера в $R^m, 2l<m$:

$$(-\Delta)^l u+q(x)u=\mu u. \tag{6}$$

Обозначим через $N(\mu)$ количество собственных чисел уравнения (6), меньших μ.

Теорема 3. *Имеет место оценка*

$$N(\mu)\leqslant c_1\int(\mu-q(x))_+^{m/2l}\,dx,$$

справедливая всегда, когда последний интеграл конечен.

В частности, при $\mu=0$ мы получаем оценку числа отрицательных собственных значений уравнения (6):

$$N(0)\leqslant c_1\int q_-(x)^{m/2l}\,dx.$$

Использование теоремы 1 совместно с емкостными критериями дискретности спектра задачи (6) позволяет получать оценки собственных значений и в тех случаях, когда теорема 3 неприменима. Мы рассматриваем ниже случай $l=1$, $m\geqslant 3$.

Пусть $q(x)\geqslant q_0$ и выполняется критерий А. М. Молчанова ([9]) дискретности спектра. Каждому $\mu>0$ сопоставим множество $E(\mu)$ следующим образом. Для каждого куба Q с ребром d введем величину $R(Q)=$ $=\inf\left\{\int\limits_{Q\setminus F}q(x)dx\colon F\supset Q,\ \operatorname{cap}(F)<k_1d^{m-2}\right\}$. Наложим на R^m решетку кубов с ребром $d=k_2\mu^{-1/2}$ и определим $E(\mu)$ как объединение тех кубов Q решетки, для которых $R(Q)<k_3d^{m-2}$ (k_1, k_2, k_3 — некоторые константы).

Теорема 4. *Для оператора Шредингера с потенциалом, удовлетворяющим критерию Молчанова, верна оценка*

$$N(\mu)<c_1\int\limits_{E(\mu)}(c_2\mu-q(x))_+^{m/2}\,dx,$$

где $c_2=c_2(m,k_1,k_2,k_3)>1$ — фиксированное число.

Пусть теперь потенциал $q(x)<0$ удовлетворяет критерию В. Г. Мазьи ([10]) дискретности отрицательного спектра. Введем, следуя ([10]), величину $\pi(E)=-\int\limits_E q(x)dx\,/\operatorname{cap}(E)$. Наложим на R^m решетку кубов со стороной $d=k_4\mu^{-1/2}$ и определим множество $F(\mu)$ как объединение тех кубов Q, для которых $\sup\{\pi(E)\colon E\subset Q\}<k_5$.

Теорема 5. *При $\mu>0$ верна оценка*

$$N(-\mu)<c_1\int\limits_{F(\mu)}(-c_3\mu-q(x))^{m/2}\,dx,$$

где $c_3=c_3(m,k_4,k_5)<1$.

Отметим, что теоремы 4 и 5 могут давать более сильные оценки, чем теорема 3, если потенциал ведет себя очень нерегулярно.

Вывод теорем 3—5 из теоремы 1 использует вариационные соображения, сходные с применявшимися М. Ш. Бирманом в ([11]).

5. Основой для получения результатов настоящей заметки является следующая

Теорема 6. *Пусть на кубе $Q\subset R^m$ задана полуаддитивная снизу функция множеств $J(E)$, абсолютно непрерывная относительно меры Лебега.*

Тогда для каждого $n \geqslant 1$ существует покрытие Ξ куба Q прямоугольными параллелепипедами $\Delta \subset Q$ такое, что

1) *количество элементов покрытия не превосходит n;*
2) *кратность покрытия не превосходит $\varkappa_1 = \varkappa_1(m)$;*
3) *для каждого $\Delta \in \Xi$ выполнено неравенство*

$$J(\Delta) \leqslant \varkappa_2 n^{-1} J(Q);$$

4) *для каждого $\Delta \in \Xi$ отношение максимального ребра к минимальному не превосходит 4.*

Эта теорема по характеру близка к теореме 2.1 работы ([6]), но, в отличие от последней, дает возможность использовать при оценке спектра более точные теоремы вложения.

Доказательство теоремы 6 чисто геометрическое *.

Автор выражает благодарность М. Ш. Бирману и М. З. Соломяку за внимание к работе.

Ленинградский государственный университет
им. А. А. Жданова

Поступило
21 VI 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] М. Ш. Бирман, М. З. Соломяк, Функц. анализ, 4, № 4, 1 (1970). [2] М. Ш. Бирман, М. З. Соломяк, Функц. анализ, 5, № 1, 69 (1971). [3] М. Ш. Бирман, В. В. Борзов, Проблемы матем. физики, 5, Л., 1971, стр. 24. [4] В. В. Борзов, ДАН, 193, № 3 (1971). [5] Г. В. Розенблюм, ДАН, 200, № 5 (1971). [6] М. Ш. Бирман, М. З. Соломяк, Матем. сборн., 73 (115), № 3, 331 (1967). [7] Б. М. Левитан, Матем. сборн., 41 (83), 439 (1957). [8] Б. Я. Скачек, Теор. функций, функц. анализ и прилож., 3, 110 (1966). [9] А. М. Молчанов, Тр. Московск. матем. общ., 2, 169 (1953). [10] В. Г. Мазья, Изв. АН СССР, сер. матем., 28, № 5, 1145 (1964). [11] М. Ш. Бирман, ДАН, 129, № 2, 239 (1959). [12] M. de Gusman, Studia Math., 34, № 3, 299 (1970).

---

* Можно также получить комбинаторное доказательство теоремы 6, основанное на весьма общем результате ([12]).