Доклады Академии наук СССР
1971. Том 201, № 3

УДК 517.54 + 513.88 : 513.83 + 519.3 : 62-50

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Д. З. АРОВ

О МЕТОДЕ ДАРЛИНГТОНА В ИССЛЕДОВАНИИ ДИССИПАТИВНЫХ СИСТЕМ

(Представлено академиком В. М. Глушковым 3 V 1971)

1°. Хорошо известны интегральное представление R-функций $F(\lambda)$ * и связанное с ним спектральное разложение самосопряженных операторов. Однако уже для такой простой функции как $F_t(\lambda) = (t-\lambda)^{-1}$ ($\operatorname{Im} t < 0$) соответствующий самосопряженный оператор действует в бесконечномерном гильбертовом пространстве. В этой статье предлагается другое представление R-функций, в виде дробно-линейного преобразования над константой со специальной матрицей-функцией коэффициентов. Для случая, когда $iF(i\lambda)$ — рациональная вещественная функция, это представление по существу получено было Дарлингтоном [1] и составляет его известный метод реализации пассивного двухполюсника (с потерями) по заданному импедансу. Обобщение этого результата на матричный случай ($2n$-полюсник) имеется в [2].

Вместо R-функций будем рассматривать класс B функций $s(z)$, определенных и голоморфных в единичном круге $|z| < 1$ и отображающих его в себя. Особый интерес для нас будут представлять те $s(z)$ $(\in B)$, у которых все граничные значения $s(\zeta)$ $(|\zeta| = 1)$ совпадают почти всюду с граничными значениями некоторой мероморфной вне единичного круга функции $\tilde{s}(z)$ ограниченной характеристики. Класс таких функций обозначим через $B\Pi$. Аналогичные классы $R\Pi$, $P\Pi$ и $C\Pi$ можно определить для R-функций, P-функций и C-функций. Формулируемая теорема 1 для класса $B\Pi$ легко переносится на все остальные классы.

Положим

$$j = \begin{pmatrix} -I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}.$$

Теорема 1. *Для того чтобы $s(z) \in B\Pi$, необходимо и достаточно (н. и д.), чтобы*

$$s(z) = [a(z)\varepsilon + b(z)][c(z)\varepsilon + d(z)]^{-1}, \tag{1}$$

где ε — константа с $|\varepsilon| \leqslant 1$, а матрица коэффициентов $A(z)\left(= \begin{pmatrix} a(z) & b(z) \\ c(z) & d(z) \end{pmatrix}\right)$ — мероморфная в круге $|z| < 1$ j-растягивающая матрица-функция с j-унитарными граничными значениями, т. е.

1) $A^*(z)jA(z) - j \geqslant 0$ $(|z| < 1)$, 2) $A^*(\zeta)jA(\zeta) - j = 0$ (*п. в.*, $|\zeta| = 1$).

Теорема 2. *Для того чтобы $s(z) \in B\Pi$, н. и д., чтобы существовала голоморфная в круге $|z| < 1$ сжимающая матрица-функция $S(z)$ с унитарными граничными значениями $S(\zeta)$ (п. в., $|\zeta| = 1$) такая, что*

$$S(z) = \begin{pmatrix} s_{11}(z) & s(z) \\ s_{21}(z) & s_{22}(z) \end{pmatrix}. \tag{2}$$

---

*$F(\lambda)$ называется R-функцией, если она определена и голоморфна при $\operatorname{Im}\lambda > 0$ и $\operatorname{Im} F(\lambda) \geqslant 0$; $Z(\lambda)$ называется P-функцией, если $iZ(-i\lambda)$ — R-функция; $Z(z)$ называется C-функцией, если $Z\left(\frac{1-\lambda}{1+\lambda}\right)$ P-функция.

В связи с теоремой 1 напомним, что в фундаментальной работе В. П. Потапова ([3]) получено мультипликативное представление мероморфных j-растягивающих в единичном круге матриц-функций $A(z)$.

Представления (1) и (2) позволяют, в частности, для $s(z)$ находить «квазипродолжение» $\tilde{s}(z)$, пользуясь принципом симметрии: $\tilde{A}(z) = jA^{*-1}(1/\bar{z})j$, $\tilde{S}(z) = S^{*-1}(1/\bar{z})$, $|z| > 1$.

Теоремы 1, 2 остаются в силе и тогда, когда $s(z)$ — матрица-функция и даже оператор-функция, значения которой суть операторы, действующие из одного гильбертова пространства в другое (формулировка теоремы 1 при этом нуждается в уточнении). Для оператор-функций считаем, что $s(z) \in B\Pi$, если $s(z) \in B$ (т. е. $s(z)$ голоморфна в круге $|z| < 1$ и $\|s(z)\| \leqslant 1$) и существует скалярная внутренняя функция $b(z)$ * такая, что $b(\zeta)s^*(\zeta)$ (*п. в.*, $|\zeta| = 1$) — граничные значения некоторой голоморфной при $|z| < 1$ ограниченной оператор-функции (в скалярном случае такое определение класса $B\Pi$ совпадает с ранее приведенным).

Если квадратная матрица-функция $s(z)$ ($\in B\Pi$) *удовлетворяет условию вещественности* ($\overline{s(\bar{z})} = s(z)$), *либо симметричности* ($s'(z) = s(z)$), *либо двум условиям вместе, то можно получить представление* (1) *с константой* ε, *удовлетворяющей этим условиям, и матрицей коэффициентов* $A(z)$ *вещественной* ($\overline{A(\bar{z})} = A(z)$) *и симплектической* ($A'(z)JjA(z) = Jj$) *соответственно. В частности, в скалярном случае в* (1) *можно получить* $A(z)$ *с* $\det A(z) = 1$.

2°. Достаточность в теоремах 1 и 2 очевидна. Необходимость получается на основании известной факторизационной теоремы Сёге (в операторном случае см. ([4])). При этом дается описание всех возможных представлений (1) и (2) для рассматриваемой функции $s(z)$. В частности, для каждой функции $s(z)$ ($\in B\Pi$) могут быть получены все минимальные представления (1), т. е. такие, матрица коэффициентов которых не имеет нетривиального левого делителя в j-метрике, являющегося матрицей коэффициентов некоторого представления (1) функции $s(z)$. Для симметрической матрицы-функции $s(z)$ ($\in B\Pi$) минимальное представление (1) с симплектической матрицей коэффициентов $A(z)$ при определенном условии нормировки единственно.

При доказательстве того, что получаемая методом факторизации матрица коэффициентов является j-растягивающей в круге $|z| < 1$ используется

Лемма. *Пусть* $A(z) = \begin{pmatrix} a(z) & b(z) \\ c(z) & d(z) \end{pmatrix}$ — *матрица-функция, элементы которой имеют ограниченную характеристику в круге* $|z| < 1$ *и пусть* $A^*(\zeta)jA(\zeta) - j = 0$ (*п. в.*, $|\zeta| = 1$).

Тогда для того чтобы $A^*(z)jA(z) - j \geqslant 0$ *всюду в круге* $|z| < 1$, *достаточно (и необходимо), чтобы* $d^{-1}(z)$, $b(z)d^{-1}(z)$, $d^{-1}(z)c(z)$ *и* $a(z) - b(z)d^{-1}(z)c(z)$ *принадлежали классу* D **.

Другой способ получения (1) состоит в постановке по заданной функции $s(z) = s_0(z)$ ($\in B\Pi$) специальной интерполяционной задачи. Все решения этой задачи описываются правой частью (1), где вместо ε подставляется произвольная функция $\mathscr{E}(z) \in B$; заданная функция $s_0(z)$ является частным решением такой задачи, получаемым при некоторой $\mathscr{E}(z) = \text{const}$ ($= \varepsilon$). Для $s_0(z)$ ($\in B\Pi$) в случае, когда $|s_0(z)| \leqslant q < 1$ ($|z| < 1$), рассматривается внутренний множитель $b(z)$ функции ограниченной характеристики $Z_0(z) + Z_0^*(1/\bar{z})$ ($|z| < 1$), где $Z_0 = (I - s_0) \times (I + s_0)^{-1}$. Интерполяционная задача состоит в отыскании всех $s(z) \in B$, для которых $[s(z) - s_0(z)] / b(z)$ — голоморфная ограниченная функция в круге $|z| < 1$. Такого рода обобщенная задача Неванлинна — Пика рассматривалась в ([7]). Имеющаяся в ([7]) матрица-функция

* Функция $b(z)$ называется внутренней, если $b(z) \in B$ и $|b(\zeta)| = 1$ (п. в., $|\zeta| = 1$).
** Определение класса D см. в ([5]), для матриц (оператор)-функций — в ([6]).

коэффициентов является j-растягивающей в круге $|z| < 1$ на основании сформулированной леммы. Для получения симплектической матрицы коэффициентов $A(z)$ ($\det A(z) = 1$) надо вместо $b(z)$ рассматривать $b^2(z)$. Случай, когда не существует число q такое, что $|s_0(z)| \leqslant q < 1$, сводится к рассмотренному.

3°. Для P- и R-функций особый интерес представляет случай, когда в соответствующих им аналогах представления (1) матрица коэффициентов является целой функцией. Такая ситуация наблюдается, например, в проблеме моментов Стильтьеса и Гамбургера, в спектральной теории Вейля дифференциальных операторов. В качестве самостоятельного объекта такая матрица-функция впервые изучалась в ([8]) (см. также ([9]), стр. 474), а также в многочисленных других работах по прямым и обратным задачам спектральной теории дифференциальных операторов, в особенности в работах М. Г. Крейна ([9]) и Л.де Бранжа ([10]). В работе В. П. Потапова ([3]) имеется мультипликативное представление таких матриц-функций, которое выясняет их связь с каноническими системами.

Теорема 3. *Для того чтобы мероморфная во всей комплексной плоскости P-функция $Z(\lambda)$ была представима в виде*

$$Z(\lambda) = [a(\lambda)R + b(\lambda)][c(\lambda)R + d(\lambda)]^{-1}, \tag{3}$$

где $R\,(>0)$ — константа, а матрица коэффициентов $A(\lambda)$ — целая J-растягивающая в правой полуплоскости, J-унитарная на мнимой оси матрица функция, н. и д., чтобы $[Z(\lambda) + Z^*(-\bar{\lambda})]^{-1}$ была целой функцией конечной степени.

Доказательство опирается на известную факторизационную теорему Н. И. Ахиезера и результат М. Г. Крейна ([11]) о целых функциях. Достаточность можно также получить на основании теоремы 27 в ([10]). Если воспользоваться результатами ([12]), то можно получить обобщения теоремы на матричный и операторный случай с той же детализацией, что и в теореме 1.

4°. Известно, что произвольная оператор-функция $s(z) \in B$ может быть истолкована как характеристическая функция некоторого (вполне неунитарного) сжатия T в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ ([13]) (или, что то же, как s-матрица рассеяния унитарного ортогонального сцепления полуунитарных операторов ([14])). Выясним структуру тех сжатий T, для которых $s(z) \in B\Pi$. Класс таких сжатий обозначим через $B\Pi$. Прежде всего заметим, что рассматриваемый в ([13]) класс сжатий C_0 может быть определен тем, что $s(z) \in B\Pi$ и граничные значения $s(\zeta)$ (п. в., $|\zeta| = 1$) унитарны. Для таких T, в частности, $T^n \to 0$, $T^{*n} \to 0$ при $n \to \infty$, т. е. $T \in C_{00}$ ($C_0 \subset C_{00}$).

Теорема 4. *Для того чтобы $T \in B\Pi$, н. и д., чтобы*

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_{-1} \oplus \mathfrak{H}_0 \oplus \mathfrak{H}_1, \tag{4}$$

где $\mathfrak{H}_{-1}$ и $\mathfrak{H}_1$ — инвариантные подпространства для T^* и T соответственно, $T^*|\mathfrak{H}_{-1}$ и $T|\mathfrak{H}_1$ — простые полуунитарные операторы и $T_0 = P_{\mathfrak{H}_0}T|\mathfrak{H}_0 \in C_0$.

Разложение (4) может быть получено на основании (2), где $S(z)$ — характеристическая функция сжатия T_0. Теорема 1 вместе с результатом В. П. Потапова ([3]) позволяет глубже изучить структуру оператора T ($\in B\Pi$), уточняя разложение (4). При этом выделяются минимальные $\mathfrak{H}_0$.

Если $s(z)$ ($\in B\Pi$) — скалярная функция и $0 \not\equiv |s(\zeta)| \not\equiv 1$ ($|\zeta| = 1$), то $\dim(\mathfrak{H}_{-1} \ominus T^*\mathfrak{H}_{-1}) = \dim(\mathfrak{H}_1 \ominus T\mathfrak{H}_1) = 1$. Для рациональной функции $s(z)$ ($\in B$) размерность минимального $\mathfrak{H}_0$ всегда равна числу полюсов функции $s(z)$.

Остановимся, наконец, на одном обобщении результата Кальмана о минимальной реализации позитивных функций ([15]).

Для произвольного сжатия T в $\mathfrak{H}$ при любом $g \in \mathfrak{H}$

$$Z(z) = ((I + zT^*)(I - zT^*)^{-1}g, g) \tag{5}$$

— C-функция. Оказывается, что если $T \in C_0$, то $Z(z) \in C\Pi$, причем «квазипродолжение» $\tilde{Z}(z)$ $(|z| > 1)$ определяется также формулой (5).

Как известно, из теоремы Рисса — Херглотца следует, что любая C-функция $Z(z)$ с $\operatorname{Im} Z(0) = 0$ представима в виде (5), где вместо T стоит унитарный оператор U в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}_U$, g — циклический вектор для U, т. е. $\bigvee\limits_{-\infty}^{\infty} \{U^n g\} = \mathfrak{H}_U$. *Если* $Z(z) \in C\Pi$, *то в этом и только этом случае существует сжатие* T *в пространстве* $\mathfrak{H}_T \subset \mathfrak{H}_U$ *такое, что:* 1) g *— циклический вектор для* T, *т. е.* $\bigvee\limits_{0}^{\infty} \{T^n g\} = \mathfrak{H}_T$; 2) U *— (минимальная) унитарная дилатация сжатия* T; 3) $T = U_s \oplus T_0$, *где* U_s *— унитарный оператор с (простым) сингулярным спектром,* T_0 *— сжатие класса* $C_{00}(1)$, *т. е.* $T_0^n \to 0$, $T_0^{*n} \to 0$ $(n \to \infty)$ *и* $\operatorname{rang}(I - T_0^* T_0) = 1$ ($\oplus$ означает ортогональную сумму; в ней одна из двух компонент может отсутствовать, U_s — сингулярная часть оператора U). При таком T справедлива реализация $Z(z)$ в виде (5). В случае, *когда* $Z(z)$ *— рациональная* C*-функция, при минимальной реализации размерность* $\mathfrak{H}_T$ *равна числу полюсов у* $Z(z)$. Если вместо класса $C\Pi$ рассмотреть класс $P\Pi$, то получим обобщение результата Кальмана ([15]). Наш подход допускает обобщения на матричнозначный и операторнозначный случаи.

Автор выражает благодарность В. П. Потапову за постановку задачи и М. Г. Крейну за полезные замечания.

Одесский государственный педагогический институт
им. К. Д. Ушинского

Поступило
19 IV 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Darlington, J. Math. and Phys., 18, Sept. (1939). [2] В. П. Потапов, Тезисы кр. научн. сообщ. Международн. конгр. матем., секция 4, М., 1966, стр. 74. [3] В. П. Потапов, Тр. Московск. матем. общ., 4, стр. 125 (1955). [4] M. Rosenblum, J. Math. An. and Appl., 23, № 1 (1968). [5] И. И. Привалов, Граничные свойства аналитических функций, 1950. [6] Ю. П. Гинзбург, УМН, 22, в. 1 (133), 163 (1967). [7] В. М. Адамян, Д. З. Аров, М. Г. Крейн, Функц. анал. и его прил., 3, в. 3, 86 (1969). [8] М. Г. Крейн, Изв. АН СССР, сер. матем., 16, 293 (1962). [9] И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн, Теория вольтерровых операторов в гильбертовом пространстве и ее прилож., «Наука», 1967. [10] L. de Branges, Hilbert Spaces of Entire Functions, N. Y., 1968. [11] М. Г. Крейн, Изв. АН СССР, сер. матем., 11, 309 (1947). [12] M. Rosenblum, J. Rovnyak, Indiana Univ. Math. J., 20, № 2 (1970). [13] Б. Секефальви-Надь, Ч. Фояш, Гармонич. анализ операторов в гильбертовом пространстве, 1970. [14] В. М. Адамян, Д. З. Аров, Математич. исследования, Кишинев, 1966. [15] R. E. Kalman, препринт доклада на V международн. конфер. по нелинейн. колебаниям, Киев, 1969.