Доклады Академии наук СССР
1971. Том 201, № 3

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

В. А. БАБЕШКО

К ТЕОРИИ ДИНАМИЧЕСКИХ КОНТАКТНЫХ ЗАДАЧ

(Представлено академиком И. Н. Векуа 7 V 1971)

1. В работах ([1-4]) детально изучены вопросы единственности и разрешимости динамических задач теории упругости о вынужденных колебаниях для областей типа пространства с удаленными ограниченными множествами. В этих работах установлено, что единственность решения будет иметь место при выполнении принципа излучения Зоммерфельда. Явление резонанса в таких областях при возбуждении лишь границ не наблюдается.

Хорошо также известно, что указанные задачи для ограниченных областей характерны наличием резонанса при определенных частотах. Посредственное положение между ограниченными и указанными неограниченными областями занимают области типа слоя, неограниченного цилиндра. В таких областях единственность решения указанных задач требует сохранения принципа излучения ([5], [6]) *, как и положено в области, содержащей бесконечно удаленную точку, но и в то же время здесь могут наблюдаться явления резонанса, как это имеет место в ограниченной области. В ([5]) показано, что принцип излучения для слоя и цилиндра имеет более сложную математическую формулировку. В этой же работе установлена возможность замены его эквивалентными принципами предельного поглощения или предельной амплитуды ([8]).

Первый принцип предполагает решение задачи колебаний в среде с поглощением энергии с последующим предельным переходом в решении к среде без поглощения. Второй принцип требует решения задачи с некоторыми (например, нулевыми) начальными условиями и краевыми — гармоническими по времени. Решение этой задачи оказывается установившимся по времени, когда последнее устремляется к бесконечности. Чтобы применить принцип предельного поглощения к уравнениям теории упругости, достаточно нагрузить их дополнительным членом, характеризующим внутреннее трение, например, пропорциональным скорости перемещений, найти ограниченные на бесконечности решения и затем устремить коэффициент пропорциональности к нулю. Отметим, что по самому построению принцип предельной амплитуды является задачей о генерировании колебаний в области. Оба принципа при использовании, разумеется, приводят к одинаковым результатам.

Много исследований посвящено изучению динамических задач теории упругости первого и второго рода. Этого однако нельзя сказать о смешанных (типа контактных) задачах теории упругости. Основную сложность при их изучении представляет решение интегральных уравнений специального типа.

В настоящей заметке приводятся некоторые результаты по теории уравнений, возникающих при изучении двумерных задач о колебании штампа на поверхности упругого слоя или бандажа на упругом цилиндре. Изучаются упругие волны, возбуждаемые при колебании.

* В работах ([5], [6]) рассматриваются задачи лишь для уравнения Гельмгольца, однако существуют задачи теории упругости ([7]), сводящиеся к этому уравнению. Поэтому принцип излучения необходим.

2. Указанные задачи приводят к интегральным уравнениям относительно контактных давлений вида

$$\int_{-a}^{a} k(x-\xi)\,q(\xi)\,d\xi = 2\pi f(x), \quad |x| \leqslant a, \quad k(t) = \int K(u)\,e^{iut}\,du. \tag{1}$$

Здесь функция $K(u)$ обладает указанными в работе ([9]) свойствами с той лишь разницей, что на вещественной оси имеется конечное число нулей и полюсов, симметрично расположенных относительно начала координат ([7]). Количество нулей и полюсов и их положение на вещественной оси зависят от частоты колебаний штампа. Считаем, что все они однократные и нет равных нулю. Контур σ расположен на вещественной оси и отклоняется от нее, лишь обходя отрицательные полюсы сверху, а положительные снизу.

Теорема 1. *Пусть $f(x) \in C_2^{0,5}(-a, a)$, а вычеты функции $K(u)$ в положительных полюсах одного знака.*

Тогда уравнение (1) *однозначно разрешимо в классе функций вида*

$$q(x)\,(a^2-x^2)^{\gamma} \in C(-a, a).$$

Доказательство теоремы проводится по изложенной в ([10]) схеме.

Контур σ делит комплексную плоскость на две части — верхнюю E_+ и нижнюю E_-. Относительно этого контура функцию $K(u)$ можно факторизовать, т. е. представить в виде

$$K(u) = K_+(u)K_-(u), \qquad K_+(-u) = K_-(u), \qquad K_+(u) \sim cu^{-\gamma}, \quad u \to \infty.$$

Здесь $K_+(u)$, $K_-(u)$ — функции, регулярные соответственно в E_+ и E_- и не имеющие там нулей. Функция $K_+(u)$ имеет отрицательные нули и полюсы, но не имеет положительных. Обозначим положительные нули функции $K(u)$ через z_k, $k = 1, 2, \ldots, n$. Условимся также в следующих обозначениях:

$$Q(u),\, F(u) = \int_{-a}^{a} e^{iux} q(x),\, f(x)\,dx,$$

$$\frac{K_-(u)}{K_+(u)}\,e^{-2aiu} = R(u), \qquad \frac{K_+(z_k)}{K_+'(-z_k)}\,e^{2aiz_k} = r_k; \tag{2}$$

$$\alpha^{\pm}(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma}\left[\pm\frac{e^{iau}}{K_-(u)(u-z)} - \frac{e^{-iau}}{K_+(u)(u+z)}\right]F(u)\,du, \quad u \in E_-, \quad z \in E_-. \tag{3}$$

Во всех формулах сохраняется либо верхний, либо нижний знак.

Через $A_{k,p}^{\pm}$ обозначим элементы матрицы, обратной к матрице вида

$$\|\delta_{ik} \pm r_k(z_i+z_k)^{-1}\|_1^n; \qquad \delta_{ik} = \begin{cases} 1, & i = k; \\ 0, & i \neq k. \end{cases}$$

Рассмотрим теперь на контуре Γ, уже лежащем строго в нижней полуплоскости ([9]), интегральное уравнение вида

$$X^{\pm}(\zeta) = \mp\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{R(u)\,X^{\pm}(u)}{u+\zeta}\,du -$$

$$-\sum_{k=1}^{n}\sum_{p=1}^{n}\frac{r_k A_{kp}}{(\zeta - z_k)}\cdot\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{R(u)\,X^{\pm}(u)}{u-z_p}\,du - \alpha^{\pm}(-z_p)\right] + \alpha^{\pm}(\zeta), \quad \zeta \in \Gamma. \tag{4}$$

Оператор, стоящий в правой части, ограничен в пространстве функций, непрерывных на Γ с весом ζ. При достаточно больших a его норма может быть сделана меньше единицы и решение уравнения можно построить по методу последовательных приближений. Его решения $X^{\pm}$, очевидно, регулярны в E_-. В условиях теоремы 1 решение уравнения (1) представимо в форме

$$q(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_\sigma \left[\frac{F(u)}{K(u)} + \frac{X^+(u) - X^-(u)}{2K_+(u)} e^{-iau} + \frac{X^+(-u) + X^-(-u)}{2K_-(u)} e^{iau} \right] e^{-iux} du. \tag{5}$$

Значение левой части уравнения (1) при $x > a$ и $x < -a$ дается соответственно функциями $\varphi_+(x)$ и $\varphi_-(x)$ вида

$$\varphi_\pm(x) = \frac{1}{4\pi} \int\limits_\sigma [X^+(\mp u) \pm X^-(\mp u)] K_\pm(u) e^{\pm iu(a \mp x)} du. \tag{6}$$

3. Функции $\varphi^\pm(x)$ описывают поведение поверхности тела вне штампа. Колеблющийся штамп возбуждает в упругом теле волны. Формулы (6) позволяют изучить их на поверхности. Ограничимся случаем достаточно больших значений параметра a. Тогда в формуле (4) можно пренебречь интегралами и представить $X^\pm(\zeta)$ в форме

$$X^\pm(\zeta) = \sum_{k=1}^n \sum_{p=1}^n \frac{r_k A_{kp}}{(\zeta - z_k)} \alpha^\pm(-z_p) + \alpha^\pm(\zeta) + O(\exp(-\mu_\Gamma \cdot 2a)), \quad \zeta \in E_-. \tag{7}$$

Пусть $f(x) = \exp i\eta x$, $\eta \geqslant 0$, $\eta \neq z_k$. В этом случае при больших a имеет место представление

$$\alpha^+(\mp\zeta) \pm \alpha^-(\mp\zeta) = 2i \sum_{k=1}^n \frac{\exp(2aiz_k + i\eta a)}{K'_-(z_k)(\zeta \pm z_k)(\eta \mp z_k)} \pm$$
$$\pm 2i \frac{\exp(\pm i\eta a)}{\zeta + \eta} \left(\frac{1}{K_\pm(\zeta)} - \frac{1}{K_\mp(\eta)} \right) + o(\exp(-\mu_\Gamma \cdot 2a)).$$

Если теперь внести представления (7), (8) в соотношение (6), то можно получить асимптотическое выражение для функций $\varphi_\pm(x)$ вида

$$\varphi_\pm(x) = \frac{i}{2} \sum_{r=1}^m [X^+(\zeta_r) \pm X^-(\zeta_r)] e^{-i(a \pm x)\zeta_r} / [K_-^{-1}(\zeta_r)]' +$$
$$+ O(e^{\mp \mu_\Gamma x} + e^{-2a\mu_\Gamma}), \quad |x| \to \infty.$$

Здесь через ζ_r $(r = 1, 2, \ldots, m)$ обозначены вещественные положительные полюсы функции $K(u)$, которые предполагаются однократными.

Умножив теперь соотношение (9) на временной множитель $\exp(-i\omega t)$, без труда обнаружим, что от штампа удаляются в разные стороны упругие волны с неубывающей амплитудой. Число волн равно m, скорость распространения — ω / ζ_r, амплитуда и сдвиг фазы у каждой волны свои и легко могут быть найдены из формул (7) — (9).

Представление (5) позволяет определить контактные напряжения под штампом.

Автор выражает благодарность И. И. Воровичу за внимание к работе и советы.

Ростовский государственный университет
Ростов-на-Дону

Поступило
26 IV 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] И. Н. Векуа, ДАН, 80, № 3 (1951). [2] И. Н. Векуа, Тр. Тбилисского матем. инст., 12 (1943). [3] В. Д. Купрадзе, УМН, 88, № 3 (53) (1953). [4] Методы потенциала в теории упругости, М., 1963. [5] А. Г. Свешников, ДАН, 73, № 5 (1950). [6] Г. Д. Малюжинец, ДАН, 78, № 2 (1951). [7] В. А. Бабешко, ПММ, 33, в. 1 (1969). [8] А. Н. Тихонов, А. А. Самарский, Уравнения математической физики, «Наука», 1966. [9] В. А. Бабешко, ДАН, 193, № 3 (1970). [10] В. А. Бабешко, ПММ, 35, в. 1 (1971).