Доклады Академии наук СССР
1972. Том 202, № 5

УДК 513.83

МАТЕМАТИКА

В. В. ФИЛИППОВ

ОБ ИНДУКТИВНОЙ РАЗМЕРНОСТИ ПРОИЗВЕДЕНИЯ БИКОМПАКТОВ

(Представлено академиком П. С. Александровым 5 VII 1971)

Для многих классов пространств доказано, что $\operatorname{Ind} X \times Y \leqslant \operatorname{Ind} X + \operatorname{Ind} Y$, см. ([1-4]). Настоящая заметка посвящена в основном построению бикомпактов X_1 и X_2 с $\operatorname{ind} X_1 = \operatorname{Ind} X_1 = 1$, $\operatorname{ind} X_2 = \operatorname{Ind} X_2 = 2$ и $\operatorname{Ind} X_1 \times X_2 > \operatorname{Ind} X_1 + \operatorname{Ind} X_2$. Кроме того, приведен один положительный результат.

Пусть Z — континуум, описанный в п. 2.1 работы ([6]), Z_0 — множество его точек счетного характера, $Z_1 = Z \setminus Z_0$, χ_2 — трансфинит, характер которого (в пространстве трансфинитов) строго больше мощности множества Z, χ_1 — трансфинит, характер которого строго больше характера χ_2. В ([4]) был построен бикомпакт Y с $\operatorname{ind} Y = \operatorname{Ind} Y = 2$, представленный в виде объединения двух своих замкнутых подмножеств Y_0 и Y_1 таких, что $\operatorname{ind} Y_0 = \operatorname{ind} Y_1 = \operatorname{Ind} Y_0 = \operatorname{Ind} Y_1 = 1$. В п. 1 заметки ([5]) есть представление этого бикомпакта в виде образа нульмерного бикомпакта θ при непрерывном отображении $\varphi : \theta \to Y$, причем множества $\theta_0 = \varphi^{-1}(Y_0)$ и $\theta_1 = \varphi^{-1}(Y_1)$ не пересекаются. Обозначим $\varphi \mid \theta_i = \varphi_i$, $i = 0, 1$.

1. Построение бикомпакта X_1. Легко построить нульмерный линейно упорядоченный бикомпакт Z^* такой, что, склеивая попарно концы пустых интервалов, мы получим континуум Z, причем при этом отображении $\lambda : Z^* \to Z$ прообразы точек из Z_0 одноточечны, а прообразы точек из Z_1 — пары точек, интервал между которыми пуст. Пусть L_1 — трансфинитная прямая длины χ_1, последнюю точку которой мы будем обозначать также χ_1. В произведении $Z^* \times L_1$ в множестве $Z^* \times \{\chi_1\}$ произведем отождествление λ. Получившиеся в результате этой факторизации Λ пространство X_1, как легко видеть, одномерно во всех смыслах.

2. Построение бикомпакта X_2. Пусть L_2 — пространство трансфинитов, не превосходящих χ_2, s — точка, не принадлежащая бикомпакту θ. В множестве $C = L_2 \times (\theta \cup \{s\}) \setminus \{\chi_2\} \times \theta$ введем топологию следующим образом: множества вида $\{\alpha\} \times \theta$, $\alpha < \chi_2$, объявим открыто-замкнутыми подпространствами с топологией θ: окрестностью точки (α, s) будем считать множества вида $(\beta, \alpha] \times \{s\} \cup (\beta, \alpha) \times \theta$, где $\beta < \alpha$. Множества $\{\alpha\} \times \theta$, $\{\alpha\} \times \theta_0$, $\{\alpha\} \times \theta_1$, $[\alpha, \beta] \times (\theta \cup \{1\}) \setminus \{\beta\} \times \theta$ будем обозначать соответственно θ^α, θ_0^α, θ_1^α, $[\alpha, \beta]$, а пространство L будем отождествлять с множеством $L \times \{s\}$.

Пусть $I = [0, 1]$. Не составляет труда построить счетное семейство $\mathscr{B}$ лежащих в квадрате I^2 ломаных без самопересечений со сторонами, параллельными осям координат, такое, что:

а) пересечение любых двух ломаных семейства $\mathscr{B}$ пусто или состоит из конечного числа точек, не являющихся их вершинами;

б) ни одна точка квадрата не принадлежит более чем двум ломаным;

в) всякая ломаная разбивает квадрат;

г) для любых двух не пересекающихся замкнутых множеств найдется разделяющая их перегородка, являющаяся объединением конечного числа попарно не пересекающихся элементов семейства $\mathscr{B}$.

Пусть Q — множество точек квадрата I^2, принадлежащих более чем одной ломаной семейства $\mathscr{B}$. Возьмем точку $q \in Q$. Она лежит на пересечении двух ломаных d_0 и d_1 семейства $\mathscr{B}$. Пусть l_i, $i = 0, 1$,— исходящий из точки q луч, идущий вблизи q вдоль ломаной d_i, t_i — лежащая в квадрате I^2 часть сектора с вершиной в q, содержащего луч l_i и ограниченного лучами, образующими с l_i углы $\pm 30°$. Пересечение этих секторов, как легко видеть, состоит лишь из их общей вершины q. Семейство таких троек (q, t_0, t_1) обозначим Σ_1. Обозначим Σ_2 семейство троек (q, t, t), где $t = I^2$, если точка q не лежит ни на одной из ломаных семейства $\mathscr{B}$, t — замыкание области с границей $b \in \mathscr{B}$, если $q \in b \setminus Q$, $t = t_0 \cap t_1$, где $t_i, i = 0, 1$,— области с границами $b_i \in \mathscr{B}$, если $q \in b_0 \cap b_1$. Как легко видеть, мощность семейства $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup Q$ равна $2\chi_0$, поэтому каждому элементу σ семейства Σ можно поставить в соответствие конфинальное множество $f(\sigma)$ трансфинитов, меньших χ_2, таким образом, что разным σ соответствуют непересекающиеся множества $f(\sigma)$.

В произведении $I^2 \times C$, взятом в тихоновской топологии, сделаем следующие перестройки: если $\alpha \in f(\sigma)$, где $\sigma = (q, t_0, t_1)$, то выбрасываем из пространства множества $(I^2 \setminus t_0) \times \theta_0^\alpha$ и $(I^2 \setminus t_1) \times \theta_1^\alpha$, а в множестве $\{q\} \times \theta^\alpha$ произведем отождествление φ; если $\alpha \in f(q)$, где $q \in Q$, то в множествах $\{q\} \times Q_i^\alpha$, $i = 0, 1$, произведем соответственно отождествления φ_i (не склеивая получающиеся при этом пространства). То, что получается при этих перестройках из множества $M \subseteq I^2 \times C$, обозначим $\Phi(M)$. Пусть $\Phi(I^2 \times C) = X_2$. Как легко видеть, $\operatorname{ind} X_2 = \operatorname{Ind} X_2 = 2$.

3. Оценка размерностей произведения. По теореме Б. А. Пасынкова ([4]) эти размерности конечны. Ниже мы дадим набросок доказательства неравенства $\operatorname{ind} X_1 \times X_2 \geqslant 4$.

Сократим обозначения, отождествляя Z^* с $Z^* \times \{\chi_1\}$, Z — с $\Lambda(Z^*)$ и I^2 с $\Phi(I^2 \times \{\chi_2\})$. Для получения требуемой оценки достаточно доказать, что граница любого открытого множества, пересекающегося с $Z \times I^2$, замыкание которого не пересекается с комбинаторной границей «куба» $Z \times I^2$, не менее чем трехмерно. Пусть V — такое множество, F — его граница, $\Lambda_0 : (Z^* \times L) \times X_2 \to X_1 \times X_2$ — отображение, порожденное отображением Λ, $V_0 = \Lambda_0^{-1}(V)$, $V_1 = \Lambda_0^{-1}(X_1 \times X_2 \setminus [V])$.

I. *Существует такой трансфинит $\alpha_1 < \chi_1$, что $\Lambda_0^{-1}(F) \supseteq \{z\} \times [\alpha_1, \chi_1] \times F_z$, где $z \in Z^*$, F_z — проекция на сомножитель X_2 множества $[V_0 \cap Z^* \times X_2] \cap [V_1 \cap Z^* \times X_2] \cap \{z\} \times X_2 \subseteq Z^* \times X^2$.*

Произвольная точка (z_1, x_1) множества $V_0 \cap Z^* \times X_2$ (соответственно $V_1 \cap Z^* \times X^2$) лежит в множестве V_0 (V_1) с некоторой окрестностью. В этой окрестности будет лежать также множество вида $\{z_1\} \times [\alpha, \chi_1] \times \{x_1\}$. Из сравнения характера трансфинита χ_1 с мощностью множества $Z^* \times X_2$ следует, что существует такой трансфинит $\alpha_1 < X_1$, что для любой точки $(z_1, x_1) \in (V_0 \cup V_1) \cap Z^* \times X_2$ множество $\{z_1\} \times [\alpha, \chi_1] \times \{x_1\}$ лежит в соответствующей окрестности, из чего следует требуемое утверждение.

II. *Существует такой трансфинит $\alpha_2 < \chi_2$, что для любой точки $z \in Z$ $V \cap \{z\} \times \Phi(I^2 \times [\alpha_2, \chi_2) \supseteq \{z\} \times \Phi((V \cap \{z\} \times I^2) \times [\alpha_2, \chi_2])$ и $(X_1 \times X_2 \setminus [V]) \cap \{z\}\Phi(I^2 \times [\alpha_2, \chi_2]) \supseteq \{z\} \times \Phi(((X_1 \times X_2 \setminus [V]) \cap \{z\} \times I^2) \times [\alpha_2, \chi_2])$.*

Это доказывается аналогично I.

III. *Пусть V' — внутренность множества $[V_0 \cap Z^* \times I^2]$ относительно $Z^* \times I^2$, V'_z — проекция на I^2 множества $V' \cap \{z\} \times I^2$, где $z \in Z^*$. Множество F трехмерно или при любом $z \in Z^*$ граница F'_z множества $[V'_z]$ есть объединение конечного числа попарно не пересекающихся элементов семейства $\mathscr{B}$.*

Если множество F не трехмерно, то его пересечение с $Z \times I^2$ нигде не плотно в $Z \times I^2$ ([1]), поэтому всякая точка множества $\{z\} \times F'_z$ предельна как для множества $V_0 \cap Z^* \times I^2$, так и для множества $V_1 \cap Z^* \times I^2$. Тогда, если множество F'_z не покрывается конечным числом элементов семейства $\mathscr{B}$, существует тройка $(q, t, t) = \sigma \in \Sigma$, где точка q предельна для пересечения A — внутренности H компакта t с множеством F'_z. Пусть $\beta \in \in f(\sigma)$, $\alpha_2 < \beta < \chi_2$. Покажем, что множество $\Lambda_0^{-1}(F)$ содержит трехмерное подмножество $\{z\} \times [\alpha_1, \chi_1] \times \Phi(\{q\} \times \theta^\beta)$. Найдутся счетные последовательности $\{l_0^i \times H_0^i, i = 1, 2, \ldots\}$ и $\{l_1^i \times H_1^i, i = 1, 2, \ldots\}$ открытых в $Z^* \times I^2$ множеств, лежащих в V_0 и V_1 соответственно, такие, что не содержащие точку q множества H_0^i и H_1^i лежат в H и сходятся к точке q, а точка z предельна для любого из множеств $\bigcup\limits_{i>k} l_0^i$ и $\bigcup\limits_{i>k} l_0^k$. Тогда, по II, в множествах V_0 и V_1 лежат соответственно множества $l_0^i \times \Phi(H_0^i \times [\alpha_2, \chi_2])$ и $l_1^i \times \Phi(H_1^i \times [\alpha_2, \chi_2])$ и их подмножества $l_0^i \times \Phi(H_0^i \times \theta^\beta)$ и $l_0^i \times \Phi(H_1^i \times \theta^\beta)$.

Как легко видеть, перестройка Φ не изменяет множества $H_0^i \times \theta^\beta$ и $H_1^i \times \theta^\beta$, поэтому множество $[V_0 \cap Z^* \times X_2] \cap [V_1 \cap Z^* \times X_2]$ содержит двумерный бикомпакт $\{z\} \times \Phi(\{q\} \times \theta_\beta)$. По I, в F лежит трехмерное множество $\{z\} \times [\alpha_1, \chi_1] \times \Phi(\{q\} \times \theta_\beta)$, которое отображением Λ_0 вкладывается в F, что и требовалось. Аналогично проверяется, что такое же множество лежит в F, когда среди элементов покрытия множества F_z' ломаными семейства $\mathscr{B}$ обязательно есть пересекающиеся.

Из доказанного следует, что возможных видов множеств $[V'_z]$ лишь счетное число. Пусть $\mathscr{D} = \{d_i, i = 1, 2, \ldots\}$ — семейство всех таких множеств, M_i — множество тех $z \in Z^*$, что $[V'_z] = d_i$. В дальнейшем мы предполагаем элементы семейства $\mathscr{D}$ попарно различными и $d_1 = \phi$.

IV. *Если* $\operatorname{ind} F \leqslant 2$, *то множество* M_i *замкнуто.*

По III $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} M_i = Z^*$. Если множество M_i не замкнуто, то существует точка $z \in [M_i] \setminus M_i$ и тогда $z \in M_j$, $j \neq i$. Тогда верно по крайней мере одно из двух: $d_i \setminus d_j \neq \phi$ или $d_j \setminus d_i \neq \phi$. Обе эти разности, когда они непусты, имеют непустые внутренности. Если верно первое, то $V'_z \supseteq \{z\} \times \times (d_i \setminus d_j)$, что невозможно по III. Если верно второе, то в V' лежит множество вида $l \times s \neq \phi$, где l — окрестность точки z в Z^*, а $s \in d_j \setminus d_i$. Но тогда $l \cap M_i = \phi$, что противоречит выбору точки z.

V. *Пусть* G_i — *внутренность множества* M_i, $z \in M_i$ — *точка несчетного характера, тогда, если* $\operatorname{ind} F \leqslant 2$, *то* $z \in G_i$.

Это легко следует из того, что множества M_i замкнуты и попарно не пересекаются.

VI. *Если* $\operatorname{ind} F \leqslant 2$, *то найдется такая точка* $z_1 \in Z_1$, *что* $\min \lambda^{-1}(z_1) \in \in G_j$, $\max \lambda^{-1}(z_1) \in G_k$, *где* $j \neq k$.

В самом деле, в противном случае мы имели бы представление континуума Z в виде объединения счетного числа попарно не пересекающихся замкнутых множеств $\lambda(M_i)$, что невозможно.

VII. *Всегда* $\operatorname{ind} F \geqslant 3$.

Допустим, что $\operatorname{ind} F \leqslant 2$. Пусть z_1 — точка, существование которой установлено в VI, d_i, d_j — соответствующие элементы семейства $\mathscr{D}$, b_i, b_j — их границы. Тогда верно по крайней мере одно из двух: $d_i \setminus d_j \neq \phi$ или $d_j \setminus d_i \neq \phi$. Примем для определенности второе, другой случай рассматривается аналогично. Как легко видеть, при сделанных нами предположениях относительно V d_i, $d_j \neq I^2$, поэтому граница множества $d_j \setminus d_i$ не пуста и покрывается конечным подсемейством $\mathscr{B}_0$ семейства $\mathscr{B}$. Пусть $x \in b \in \in \mathscr{B}_0$ — точка этой границы и $l_1 \times l_2 \leqslant I^2$ — ее окрестность, не пересекающаяся с элементами семейства $\mathscr{B}_0$, отличными от b, β_1, $\beta_2 \in Z$ таковы, что $\phi \neq [\lambda^{-1}(\beta_2), \min \lambda^{-1}(z_1)] \subseteq G_i$, $\phi \neq [\max \lambda^{-1}(z_1), \beta_2] \subseteq G_j$.

Наша цель будет достигнута, если мы покажем, что трехмерно множество $F_0 = F \cap [\beta_1, \beta_2] \times \Phi(l_1 \times l_2 \times [\alpha_2, \chi_2])$. Пусть $F_1 = F_0 \cap \{z_1\} \times X_2$, $F_2'(z)$ — проекция границы множества $[V] \cap \{z\} \times \Phi(l_1 \times l_2 \times [\alpha_2, \chi_2])$ в пространстве $\{z\} \times \Phi(l_1 \times l_2 \times [\alpha_2, \chi_2])$. Как легко видеть, $F_2'(z)$ — одно и тоже множество F_2' для всех $z \in [z_1, \beta_2]$. Если обозначить $F_2 = [z_1, \beta_2] \times$

$\times F_2'$, то имеем $F_0 \supseteq F_1 \cup F_2$ и $(z_1, x) \in F_1 \cap F_2$. Аналогично III и построениям заметки ([5]) показывается, что граница любой достаточно узкой окрестности этой точки содержит замкнутое двумерное множество.

4. Теорема 1. *Если L — линейно упорядоченный континуум, в котором есть плотное σ-нигде не плотное подмножество.*

Тогда для произвольного регулярного пространства X верно

$$\operatorname{ind} X \times L \leqslant \operatorname{ind} X + 1.$$

Как следствие теоремы 1 получается

Теорема 2. *Пусть бикомпакт K нульмерно отображается на произведение k континуумов, каждый из которых содержит плотное σ-нигде не плотное подмножество.*

Тогда для произвольного регулярного пространства X верно

$$\operatorname{ind} X \times K \leqslant \operatorname{ind} X + k.$$

Автор выражает благодарность А. В. Архангельскому и И. К. Лифанову за полезные обсуждения.

Механико-математический факультет
Московского государственного университета
им. М. В. Ломоносова

Поступило
2 VII 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] И. К. Лифанов, ДАН, **177**, № 4 (1967). [2] J. Nagata, Proc. II Prague Top. Symp., Prague, 1966. [3] J. Nagata, Gen. Top. and its Appl., **1**, № 1 (1971). [4] Б. А. Пасынков, ДАН, **189**, № 2 (1969). [5] В. В. Филиппов, ДАН, **186**, № 5 (1969). [6] В. В. Филиппов, ДАН, **192**, № 2 (1970). [7] В. В. Филиппов, Матем. сборн., **83** (125), № 1 (9) (1970).