Доклады Академии наук СССР
1972. Том 203, № 1

УДК 512.83 *МАТЕМАТИКА*

Б. Д. ЛЮБАЧЕВСКИЙ

СТРОЕНИЕ ГРУППЫ МНОГОЧЛЕННЫХ МАТРИЦ, УНИТАРНЫХ В ИНДЕФИНИТНОЙ МЕТРИКЕ ИНДЕКСА 1

(Представлено академиком В. И. Смирновым 26 VII 1971)

1°. Пусть $U(\omega) = \sum_{\iota=0}^{\varkappa} U_\iota \omega^\iota$ — многочленная матрица (м.м.) размера $\nu_1 \times \nu_2$. Здесь U_ι — комплексные $\nu_1 \times \nu_2$-матрицы, ω — скалярная переменная *. Положим $U(\omega)^* = \sum_{\iota=0}^{\varkappa} U_\iota^* \omega^\iota$. Пусть $D = \operatorname{diag}\{-1, 1, \ldots, 1\}$ — диагональная $\nu \times \nu$ матрица, $\nu \geqslant 2$. В заметке будет описана группа M всех м.м. $U(\omega)$ размера $\nu \times \nu$, удовлетворяющих уравнению

$$U(\omega) \cdot D \cdot U(\omega)^* = D, \tag{1}$$

т. е. группа м.м., унитарных в индефинитной метрике индекса 1. Описание эффективно: в определенной стандартной форме представлена произвольная матрица из M. Основные результаты формулируются в п.п. 2°, 3°. Эту задачу целесообразно рассмотреть в связи с задачей ([1]) факторизации знаконеопределенной м.м. $A(\omega) = A(\omega)^*$ в виде $A(\omega) = V(\omega) \cdot C \cdot V(\omega)^*$. Здесь $V(\omega)$ — м.м., $C = C^*$ — постоянная матрица, обе размера $\nu \times \nu$. Задача факторизации стала рассматриваться в связи с приложениями в теории управления, в дифференциальных играх ([2]).

2°. Вводятся множества: 1) векторов $\Xi = \{z = \operatorname{colon}\{\zeta_1, \ldots, \zeta_\nu\} \mid \zeta_1 = 1,\ z^*Dz = 0\}$; $\Delta_z^0 = \{d \mid d^*z = d^*Dz = 0\}$, $z \in \Xi$; 2) вектор-многочленов $\Delta_z = \{g = g_1\omega + g_2\omega^2 + \ldots \mid g_\iota \in \Delta_z^0\}$; 3) многочленов $\Phi = \{\varphi = \varphi(\omega) \mid \varphi(0) = 0, \varphi^* = -\varphi\}$.

Имеем: 1) Ξ взаимно однозначно параметризует множество образующих конуса $\Lambda = \{x \mid x^*Dx = 0\}$; 2) $\Delta_z \neq \{0\}$ лишь при $\nu > 2$; 3) элемент $\varphi \in \Phi$ имеет вид $\varphi(\omega) = i \sum_{\geqslant 1} \rho_\iota \omega^\iota$, где ρ_ι вещественны, сумма конечна. При $z \in \Xi$, $\varphi \in \Phi$, $g \in \Delta_z$ положим

$$G_z(\varphi, g) = D[z(\varphi - (1/2) \cdot g^*g)z^* + (zg^*gz^*)] + I. \tag{2}$$

Определим множества матриц:

1) $M_z = \{G_z(\varphi, g) \mid \varphi \in \Phi,\ g \in \Delta_z\}$, $z \in \Xi$;

2) $M_0 = \{U(\omega) \in M \mid U(0) = I\}$; $N = \{V \in M \mid \text{ст}\, V = 0\}$; $\Upsilon = \{W \in N \mid W = \operatorname{diag}\{1, L\}\}$, где L — унитарные $(\nu - 1) \times (\nu - 1)$-матрицы.

Очевидно, произвольная м.м. $U(\omega) \in M$ единственным образом записывается в виде $U(\omega) = U_0(\omega) \cdot V$, где $U_0(\omega) \in M_0$, $V \in N$.

Основной результат касается структуры группы M_0 и формулируется следующим образом.

---

* Если $U_\varkappa \neq 0$, то $\varkappa$ — степень м.м. $U(\omega)$ (запись: $\varkappa = \text{ст}\, U(\omega)$). Ниже приняты следующие обозначения и соглашения. Звездочка обозначает эрмитово сопряжение постоянной матрицы. Скаляры обозначены малыми греческими буквами, малыми латинскими буквами — векторы-столбцы высоты ν, например, $z = \operatorname{colon}\{\zeta_1, \ldots, \zeta_\nu\}$. Прописные латинские буквы оставлены для матриц. Через i обозначена мнимая единица, через I — единичная $\nu \times \nu$-матрица. Символ $\ni$ читается «такой (такие), что». Запись типа $\{\Gamma_1 \mid \Gamma_2\}$ используется для обозначения множества с общим элементом Γ_1 и с определяющим это множество свойством Γ_2.

Теорема 1. 1) *При всяком* $z \in \Xi$ *множество* M_z *является группой относительно умножения матриц. Группа* M_0 *есть свободное произведение* (3) *групп* M_z *при индексе* z, *пробегающем множество* Ξ;

2) *закон умножения в каждой из групп* M_z *подчинен соотношению*

$$G_z(\varphi, g)\cdot C_z(\psi, h) = G_z(\varphi+\psi+(1/2)\cdot(h^*g-g^*h),\ \ g+h). \quad (3)$$

Здесь $z \in \Xi$, $\varphi, \psi \in \Phi$, $g, h \in \Delta_z$;

3) *связь между различными группами* $\mathbf{M}_z$ *определяется соотношением*

$$W\cdot G_z(\varphi, g)\cdot W^{-1} = G_{Wz}(\varphi, Wg). \quad (4)$$

Здесь $W \in \Upsilon$, $z \in \Xi$, $\varphi \in \Phi$, $g \in \Delta_z$;

4) *отображение* $(z, \varphi, g) \mid\to G_z(\varphi, g)$ *взаимно однозначно на множестве наборов* $\{(z, \varphi, g) \mid z \in \Xi,\ \varphi \in \Phi,\ g \in \Delta_z,\ \varphi \neq 0$ *или* $g \neq 0\}$. *Если* $U(\omega) = G_{z_1}(\varphi_1, g_1)\cdot\ldots\cdot G_{z_\eta}(\varphi_\eta, g_\eta)$, *причем* $z_\iota \neq z_{\iota+1}$, $\iota = 1, \ldots, \eta-1$, $G_{z_\iota}(\varphi_\iota, g_\iota) \neq I$, $\iota = 1, \ldots, \eta$, то $\text{ст}\, U(\omega) = \text{ст}\, G_{z_1}(\varphi_1, g_1) + \ldots + \text{ст}\, G_{z_\eta}(\varphi_\eta, g_\eta) = \text{ст}\,(\varphi_1 - g_1^*g_1) + \ldots + \text{ст}\,(\varphi_\eta - g_\eta^*g_\eta)$. *Здесь* $z \in \Xi$, $\varphi_\iota \in \Phi$, $g_\iota \in \Delta_{z_\iota}$, $\iota = 1, \ldots, \eta$;

5) *центр группы* M_z, $z \in \Xi$, *есть множество* $\Psi_z = \{G_z(\varphi, 0) \mid \varphi \in \Phi\}$. *При* $\nu > 2$ *коммутант группы* M_z *равен ее центру, при* $\nu = 2$ *группа* M_z *коммутативна и совпадает с* Ψ_z.

3°. Вещественный случай. Обозначим подгруппу м.м. из M с вещественными коэффициентами через M′. Пусть Ξ', Φ', Δ_z', $z \in \Xi'$,— вещественные аналоги множеств Ξ, Φ, Δ_z, введенных в п. 2°. Очевидно, $\Phi' = \{0\}$. Аналогично п. 2° определим M_z', M_0'. Опишем структуру группы M_0'.

Теорема 2. *Если* $\nu = 2$, *то группа* M_0' *тривиальна. Если* $\nu > 2$, *то группа* M_0' *не тривиальна и является свободным произведением групп* M_z' *при индексе* z, *пробегающем множество* Ξ'. *Группы* M_z', $z \in \Xi'$, *коммутативны*.

Интересно также описать подгруппу м.м. из M с вещественными коэффициентами относительно переменной $\lambda = i\omega$. Как и раньше, введем $\Phi'' = \{\varphi = \varphi(\lambda) \mid \varphi(0) = 0,\ \varphi^* = -\varphi\}$. Здесь окажется $\varphi(\lambda) = \rho_1\lambda + \rho_2\lambda^3 + \rho_3\lambda^5 + \ldots$ (ρ_ι вещественны, сумма конечна). Определим Δ_z'', $z \in \Xi'$, и далее M_z'', M_0''.

Теорема 3. 1) *Группа* M_0'' *есть свободное произведение групп* M_z'' *при индексе* z, *пробегающем множество* Ξ';

2) *если* $\nu = 2$, *то вышеуказанное свободное произведение содержит лишь две группы* M_z'' *и эти группы коммутативны*;

3) *если* $\nu > 2$, *то группа* M_z'', $z \in \Xi'$, *некоммутативна. Ее коммутант совпадает с центром и равен* $\{G_z(\varphi, 0) \mid \varphi \in \Phi''\}$.

4°. Доказательства. Линейную зависимость a и b обозначим через $a \parallel b$; пишем $a \,|||\, b$, если $a \parallel b$ и коэффициенты нетривиальной нулевой линейной комбинации векторов a и b могут быть взяты вещественными. Доказательства лемм 1—6 особых затруднений не вызовут.

Лемма 1. $(a, b \in \Lambda) \Rightarrow ((a^*Db = 0) \Leftrightarrow (a \parallel b))$.

Лемма 2. $(ab^* = ba^*) \Leftrightarrow (a \,|||\, b)$.

Лемма 3. $(XDX^* = X^*DX = 0) \Rightarrow (\exists y, z \in \Xi,\ \alpha \ni X = \alpha Dyz^*)$.

Лемма 4. *Пусть* y, $z \in \Xi$ *и выполнено* а) $XDz = 0$; б) $y^*X = 0$; в) $\forall k \in \Delta_z^0 (XDk \parallel Dy)$.

Тогда $\exists s \in \Delta_z^0$, $r \in \Delta_y^0$, $\alpha \ni X = D(rz^* - ys^* + \alpha yz^*)$.

Лемма 5. *Пусть* $z_\iota \in \Xi$, $\iota = 1, \ldots, \eta$. *Имеем*

$(Dz_1z_1^*\cdot Dz_2z_2^*\cdot\ldots\cdot Dz_\eta z_\eta^* = 0) \Leftrightarrow (\exists \iota_0 (1 \leqslant \iota_0 < \eta) \ni z_{\iota_0} = z_{\iota_0+1})$.

Лемма 6. *Пусть* $\varphi \in \Phi$, $g \in \Delta_z (z \in \Xi)$ *и пусть* φ, g *не нули одновременно*.

Тогда 1) *старший коэффициент м.м.* $G_z(\varphi, g)$ *пропорционален* Dzz^*;

2) $\text{ст}\, G_z(\varphi, g) = \text{ст}\,(\varphi - g^*g) > 0$.

Наиболее сложно доказывается

Лемма 7. *Умножением м.м. $U(\omega) \in \mathrm{M}$ справа или слева на подходящую м.м. вида* (2) *(вещественную при вещественной $U(\omega)$) можно понизить степень м.м. $U(\omega)$, если* ст $U(\omega) > 0$.

Доказательство леммы 7. Пусть $U(\omega) = \sum\limits_{\iota=0}^{\varkappa} X_{\varkappa-\iota}\cdot\omega^{\iota}$, ст $U(\omega) = \varkappa$. Из (1) вытекает $U(\omega)^*\cdot D\cdot U(\omega) = D$. Доопределив при $\iota > \varkappa$ последовательность матриц X_ι нулями, получим семейство равенств

$$\sum_{\iota=0}^{\gamma} X_\iota D X^*_{\gamma-\iota} = 0, \qquad (5_\gamma)$$

$$\sum_{\iota=0}^{\gamma} X^*_\iota D X_{\gamma-\iota} = 0. \qquad (6_\gamma)$$

Здесь $\gamma = 0, 1, \ldots, 2\varkappa - 1$. Применяя лемму 3 к $X = X_0$, получим $X_0 = \alpha_0 D y z^*$ при некоторых $y, z \in \Xi$, α_0. Покажем, что выполнена хотя бы одна из возможностей: I) $\exists \varphi \in \Phi$, $g \in \Delta_z \ni$ ст $[U(\omega)\cdot G_z(\varphi, g)] < \varkappa$; II) $\exists \psi \in \Phi$, $h \in \Delta_y \ni$ ст $[G_y(\psi, h)\cdot U(\omega)] < \varkappa$. (Множества Ξ, Φ, Δ_z, Δ_y нужно соответственно изменить в вещественном случае.)

Для натуральных параметров $\tau \leqslant \mu$, ξ, рассмотрим условия: А) $\exists \alpha_\iota$, $0 \leqslant \iota \leqslant \tau - 1$, $\ni X_\iota = \alpha_\iota D y z^*$; Б) $X_\iota D z = 0$, $\tau \leqslant \iota \leqslant \mu - 1$, $X_\mu D z \neq 0$; В) $y^* X_\iota = 0$, $\tau \leqslant \iota \leqslant \xi - 1$, $y^* X_\xi \neq 0$; Г) $\exists s \in \Delta_z^0$, $r \in \Delta_y^0$, $\alpha_\tau \ni X_\tau = D(rz^* - ys^* + \alpha_\tau y z^*)$.

Возьмем наибольшее $\tau \ni$ А). Очевидно, $1 \leqslant \tau \leqslant \varkappa$. Возьмем $\mu \ni$ Б), $\xi \ni$ В). Очевидно, $\tau \leqslant \mu$, $\xi \leqslant \varkappa$. Предположим, $\mu < 2\tau$. Проверим выполнение I). Используя лемму 2, из (5_μ) выводим: $\exists \rho = \operatorname{Re} \rho \ni \alpha_0 D y + i\rho X_\mu D z = 0$. Чтобы обеспечить I), можно взять $\psi(\omega) = i\rho\omega^\mu$, $g(\omega) = 0$. (В вещественном случае переменной ω по необходимости получим $\varphi(\omega) = 0$. В вещественном случае переменной λ получим $\varphi(\lambda) = 0$ при четных μ). Аналогично можно установить II) при $\xi < 2\tau$. Пусть μ, $\xi \geqslant 2\tau$. Проверим Г), воспользовавшись при $X = X_\tau$ леммой 4. Условия а) и б) очевидны, а для проверки в) воспользуемся леммой 1. Пусть $k \in \Delta_z^0$, $v = X_\tau D k$. Надо установить I′) $v^* D v = 0$, II′) $y^* v = 0$. Соотношение $(6_{2\tau})$ умножим справа на Dk, слева — на $k^* D$. В левой части все члены, кроме одного, обратятся в нуль в силу предположений. Получим I′). Имеем $y^* v = (y^* X_\tau) D k = 0$, т. е. II′).

Не нарушая общности считаем, что $s \neq 0$ (возможность $r \neq 0$ симметрична, случай $s = r = 0$ противоречит определению τ).

Пусть $w = X_{2\tau} D z$, $p = \alpha_0 D y$. Используя лемму 1, покажем, что $w \| p$. Установим I″) $w^* D w = 0$, II″) $p^* D w = 0$. Из равенства $(6_{4\tau})$ получим I″). Умножим $(6_{2\tau})$ справа на Dz. Получим $\bar{\alpha}_0 z y^* w = 0$, откуда II″). Итак, $w = (\sigma_0 + i\rho_0)\cdot p$, где σ_0, ρ_0 вещественны. (В вещественном случае переменной ω получим $\rho_0 = 0$. Соответствующее изменение нужно произвести в вещественном случае переменной λ.)

В $(5_{2\tau})$ подставим $X_0 = pz^*$, $X_{2\tau} D z = (\sigma_0 + i\rho_0)\cdot p$, $X_\tau = -ps_0^* + nz^*$, где $n = D(r + \alpha_\tau y)$, $s_0 = s / \bar{\alpha}_0$. Получим $pp^*(2\sigma_0 + s_0^* D s_0) = 0$. С учетом равенства $s_0^* D s_0 = |s_0|^2$ получаем $\sigma_0 = -{}^1/_2 |s_0|^2$.

Теперь все готово для проверки I). Положим $\varphi(\omega) = i\rho\omega^{2\tau}$, $g(\omega) = d\omega^\tau$, где $d \in \Delta_z^0$ и вещественное ρ — неопределенные пока константы, которые надо подобрать из условия $X_0 + X_{2\tau} D z z^* (i\rho - {}^1/_2 |d|^2) + X_\tau D(z d^* - d z^*) \equiv p z^* \varepsilon = 0$. Здесь $\varepsilon = 1 + s_0^* d + (i\rho_0 - {}^1/_2 |s_0|^2 \times (i\rho - {}^1/_2 |d|^2)$. Ищем d в виде $d = \vartheta s_0$, где ϑ — неопределенная константа. Имеем $\varepsilon = \varepsilon_1 - i\cdot{}^1/_2 |s_0|^2\cdot\varepsilon_2$, где $\varepsilon_1 = |1 + {}^1/_2 \vartheta\cdot|s_0|^2|^2 - \rho\cdot\rho_0$, $\varepsilon_2 = \rho_0 \times |\vartheta|^2 - 2\cdot\operatorname{Im}\vartheta + \rho$. В случае $\rho_0 = 0$, полагая $\rho = 0$, $\vartheta = -2|s_0|^{-2}$, получим $\varepsilon = 0$. Иначе имеем $\varepsilon_1 = 0$, если $\rho = |1 + {}^1/_2 \vartheta\cdot|s_0|^2|^2 / \rho_0$, и в этом случае $\varepsilon_2 = \rho_0^{-1}\{1 + |\vartheta|^2 \cdot [\rho_0^2 + (^1/_2|s_0|^2)^2] - 2[\rho_0 \cdot \mathrm{Im}\,\vartheta - (^1/_2|s|^2) \times \times \mathrm{Re}\,\vartheta]\}$. Если теперь положить $\vartheta = (ip_0 - {}^1/_2|s_0|^2(\rho_0^2 + (^1/_2|s_0|^2)^2)^{-1}$, то окажется $\varepsilon_2 = 0$. Лемма 7 доказана.

Доказательство теорем получается несложной проверкой с использованием лемм 5, 6, 7.

Автор выражает глубокую признательность В. А. Якубовичу и Д. К. Фаддееву за внимание к работе.

Ленинградский государственный университет
им. А. А. Жданова

Поступило
4 VII 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. А. Якубович, ДАН, **194**, № 3 (1970). [2] В. А. Якубович, ДАН, **195**, № 2 (1970). [3] А. Г. Курош, Теория групп, изд. 3, М., 1967.