

УДК 62-505

КИБЕРНЕТИКА И ТЕОРИЯ РЕГУЛИРОВАНИЯ

А. А. МЕЛИКЯН, Ф. Л. ЧЕРНОУСЬКО

О ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИГРАХ С ПЕРЕМЕННЫМИ УСЛОВИЯМИ ИНФОРМИРОВАННОСТИ

(Представлено академиком А. Ю. Ишлинским 28 VII 1971)

В теории дифференциальных игр обычно предполагается (¹⁻³), что каждому игроку в любой момент времени точно известны фазовые координаты обеих сторон. Однако в прикладных задачах информированность сторон неидеальна. Дифференциальные игры с запаздыванием информации рассматривались в (^{4, 5}). В данной работе рассматриваются игры, в которых одна из сторон может измерять фазовые координаты другой стороны лишь на части интервала движения.

1. Пусть движение управляемых объектов X , Y описывается уравнениями

$$X: dx/dt = f(t, x, u), \quad Y: dy/dt = g(t, y, v). \quad (1)$$

Здесь t — время, x, y — векторы фазовых координат объектов, u, v — векторы их управляющих функций, f, g — заданные вектор-функции. Размерности векторов x, y, u, v произвольны. Управляющие функции на всем интервале движения подчинены ограничениям

$$u(t) \in U, \quad v(t) \in V, \quad (2)$$

где U, V — замкнутые ограниченные множества. Начальные условия имеют вид

$$x(t_0) = x^0, \quad y(t_0) = y^0, \quad (3)$$

где t_0 — заданный начальный момент времени. Момент окончания игры T будем для простоты считать фиксированным, $T > t_0$. Приводимые ниже постановки могут быть рассмотрены и при более общих условиях окончания игры.

Целью стороны X является минимизация функционала

$$J = F(x(T), y(T)), \quad (4)$$

где $F(x, y)$ — заданная функция. Сторона Y стремится максимизировать функционал (4).

Опишем условия информированности стороны X . В каждый момент $t \in [t_0, T]$ стороне X точно известен вектор собственных фазовых координат $x(t)$. Кроме того, задано множество Q моментов времени, $Q \subset [t_0, T]$, такое, что если $t \in Q$, то в момент t стороне X точно известен фазовый вектор $y(t)$ стороны Y . В остальные моменты времени X не получает информации о фазовом векторе противника.

Для определенности будем считать, что множество Q состоит из N замкнутых интервалов наблюдения $[a_i, b_i]$, причем

$$t_0 = a_1 \leq b_1 < a_2 \leq \dots < a_N \leq b_N = T. \quad (5)$$

Некоторые (или все) интервалы $[a_i, b_i]$ могут стягиваться в точки ($a_i = b_i$), что соответствует отдельным моментам наблюдения.

Управление u стороны X в момент t формируется в зависимости от результатов наблюдения во все предшествующие моменты. При принятых условиях информированности это эквивалентно стратегиям в виде функ-

ций $u = u(t, x(t), y(t'))$, где $t'(t)$ — последний момент наблюдения

$$t'(t) = t \quad \text{при} \quad a_i \leq t \leq b_i, \quad i = 1, 2, \dots, N; \quad (6)$$

$$t'(t) = b_i \quad \text{при} \quad b_i < t < a_{i+1}, \quad i = 1, 2, \dots, N-1.$$

Пусть сторона X применяет стратегию u указанного типа, а сторона Y реализует управление $v = v(t)$ в виде функции времени. Будем считать эти управления сторон допустимыми, если они удовлетворяют ограничениям (2) и обеспечивают существование решения системы (1) при условиях (3). Каждой стратегии u и управлению v указанных типов отвечает значение $J(u, v)$ функционала (4). Поставим задачу отыскания оптимальной гарантирующей стратегии u^* стороны X , т. е. стратегии, доставляющей минимакс

$$J^* = \inf_u \sup_v J(u, v) = \sup_v J(u^*, v). \quad (7)$$

Здесь $\inf$ берется по всем допустимым стратегиям, $\sup$ — по всем допустимым управлениям $v(t)$. Для построения гарантирующей стратегии игрока X условия информированности стороны Y несущественны.

2. Сформулированная задача отвечает случаю, когда интервалы наблюдения заранее заданы. Отметим некоторые естественные обобщения этой постановки.

Множество Q , т. е. параметры N, a_i, b_i в (5), могут быть функциями от фазовых координат объектов (например, объект Y может уходить из поля зрения объекта X) или от их управлений. Если эти параметры зависят от управления стороны X , то это означает, что сторона X может выбирать (заранее или в процессе движения) моменты или интервалы наблюдения, например, при заданном их числе и суммарной длительности.

Еще одним обобщением постановки п. 1 и одновременно постановки работ (⁴, ⁵) является следующая задача. Пусть дана кусочно-непрерывная на интервале $[t_0, T]$ функция $q(t)$, удовлетворяющая условию $q(t) \leq t$ и такая, что объекту X в момент t становятся известны векторы $x(t)$, $y(q(t))$. Если $q(t) = t - c$, где c — константа, $c > 0$, то имеем постановку работ (⁴, ⁵), а постановка п. 1 получится, если положить $q(t) = t'(t)$, см. (6).

Наконец, параметры, характеризующие множество Q , могут зависеть от стороны Y . Это означает, что сторона Y может включать помехи, исключаяющие наблюдение; суммарная длительность помех может быть задана. Во всех случаях, как и в п. 1, требуется построить гарантированную стратегию стороны X .

3. Задача, поставленная в п. 1, может быть сведена к игре с полной информацией и импульсными управлениями сторон. В самом деле, на интервалах (b_i, a_{i+1}) при $i = 1, \dots, N-1$ сторона X не получает информации о фазовом векторе Y и поэтому может выбрать управление u на всем этом интервале в момент b_i . Это эквивалентно выбору точки из области достижимости игрока X для момента a_{i+1} . Используя эти соображения, преобразуем уравнения движения. Введем переменную

$$\begin{aligned} \tau(t) &= \sum_{j=1}^{i-1} (b_j - a_j) + t - a_i, \quad a_i \leq t \leq b_i, \quad i = 1, \dots, N; \\ \tau(t) &= \sum_{j=1}^i (b_j - a_j), \quad b_i < t < a_{i+1}, \quad i = 1, \dots, N-1, \end{aligned} \quad (8)$$

равную суммарной длительности наблюдения к моменту t . Уравнения (1) можно переписать в виде

$$\begin{aligned}\frac{dx}{d\tau} &= f(t(\tau), x, u) + \sum_{i=1}^{N-1} p_i \delta(\tau - \tau_i), \\ \frac{dy}{d\tau} &= g(t(\tau), y, v) + \sum_{i=1}^{N-1} q_i \delta(\tau - \tau_i),\end{aligned}\quad (9)$$

$$\tau_i = \sum_{j=1}^i (b_j - a_j), \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad 0 \leq \tau \leq \tau_N.$$

Здесь δ — дельта-функция; зависимость $t(\tau)$ есть обращение первого равенства (8). Моменты τ_i подачи импульсов соответствуют интервалам отсутствия наблюдений. В эти моменты стороны X , Y выбирают векторы импульсов p_i , q_i , причем сторона X в момент τ_i знает фазовые координаты $x(\tau_i)$, $y(\tau_i)$ до скачка (функции $t(\tau)$, $x(\tau)$, $y(\tau)$ в моменты τ_i считаем непрерывными слева). Векторы p_i , q_i в момент τ_i должны выбираться так, чтобы удовлетворять ограничениям

$$p_i + x(\tau_i) \in D_i(x(\tau_i)), \quad q_i + y(\tau_i) \in G_i(y(\tau_i)), \quad i = 1, \dots, N-1. \quad (10)$$

Здесь $D_i(x)$, $G_i(y)$ — области достижимости объектов X , Y , описываемых соотношениями (1), (2), в момент $t = a_{i+1}$ при условии, что их фазовые координаты в момент $t = b_i$ равны x и y соответственно. Таким образом, с точки зрения стороны X задача п. 1 после преобразования (8) сводится к дифференциально-многошаговой игре с полной информацией, описываемой уравнениями (9). Каждая сторона располагает непрерывными и импульсными управлениями, подчиненными ограничениям (2), (10). Начальные условия (3) и функционал (4) для этой игры запишутся в виде $x = x^0$, $y = y^0(\tau = 0)$, $J = F(x(\tau_N), y(\tau_N))$.

4. Рассмотрим некоторые примеры.

1) Пусть справедливы все допущения п. 1, причем уравнения (1), ограничения (2), начальные условия (3) и функционал (4) имеют вид

$$\begin{aligned}dx/dt &= u, \quad dy/dt = v, \quad |u| \leq \mu, \quad |v| \leq \nu, \quad \mu > \nu > 0, \\ x(t_0) &= x^0, \quad y(t_0) = y^0, \quad J = |x(T) - y(T)|.\end{aligned}\quad (11)$$

Здесь и ниже все векторы имеют произвольную одинаковую размерность, μ , ν — постоянные. Множество Q задано в виде N интервалов (см. (5)). Применяя подход п. 3, можно показать, что оптимальная гарантирующая стратегия u^* имеет вид

$$\begin{aligned}u^* &= \mu(y(t') - x(t)) |y(t') - x(t)|^{-1}, \quad x(t) \neq y(t'), \\ u^* &= 0, \quad x(t) = y(t'), \quad t_0 \leq t \leq T,\end{aligned}\quad (12)$$

где t' определено равенством (6). Минимальное гарантированное значение функционала (7) при этом

$$\begin{aligned}J^* &= \max_{0 \leq i \leq N} R_i, \quad R_0 = 0, \quad R_N = |x^0 - y^0| - (\mu - \nu)(T - t_0), \\ R_i &= \nu(T - b_i) - \mu(T - a_{i+1}), \quad i = 1, 2, \dots, N-1.\end{aligned}\quad (13)$$

Пусть все интервалы наблюдения имеют одинаковую длину Δ , а интервалы выключения информации — длину θ , т. е. $a_i = t_0 + (i-1)(\Delta + \theta)$, $b_i = t_0 + i(\Delta + \theta) - \theta$, $i = 1, 2, \dots, N$. Тогда соотношение (13) упрощается и принимает вид

$$J^* = \max[0, |x^0 - y^0| - (\mu - \nu)(T - t_0), \nu(\Delta + \theta) - \mu\Delta]. \quad (14)$$

2) Пусть управления и ограничения имеют по-прежнему вид (11), но время окончания игры не фиксировано. Рассмотрим задачу преследования игроком X игрока Y . Условием окончания игры считаем выполнение неравенства $|x - y| \leq l$. Будем предполагать, что интервалы наблюдения длины Δ чередуются с интервалами выключения информации длины θ на

всей оси времени. Из формулы (14) тогда можно получить, что для игрока X необходимым и достаточным условием возможности гарантированного окончания игры за конечное время при любой начальной позиции является условие $\mu > \max [v, \{v(\Delta + \theta) - l\} / \Delta]$.

3) Пусть уравнения движения, ограничения, начальные условия и функционал имеют снова вид (11), а множество Q состоит из N точек наблюдения. В обозначениях (5)

$$a_1 = t_0, \quad a_N = T, \quad b_i = a_i, \quad i = 1, \dots, N. \quad (15)$$

Здесь и в примере 4) требуется выбрать точки наблюдения a_i при $i = 1, \dots, N$ на интервале $[t_0, T]$ при соблюдении условий (15) и стратегию u стороны X так, чтобы обеспечить наименьшее гарантированное значение функционала (11). Можно показать, что оптимальная стратегия задается теми же соотношениями (12). Оптимальными моментами наблюдений являются

$$a_i = T - (T - t_0) (k^{i-1} - k^{N-1}) (1 - k^{N-1})^{-1}, \quad k = v / \mu < 1, \\ i = 1, \dots, N. \quad (16)$$

Решение (16) при некоторых значениях начальных фазовых координат не единственно. Соответствующее (16) минимальное значение функционала

$$J^* = \max [|x^0 - y^0| - (\mu - v) (T - t_0), \mu (T - t_0) k^{N-1} (1 - k^{N-1})^{-1}]. \quad (17)$$

Перейдя в соотношениях (16), (17) к пределу при $N \rightarrow \infty$, получим

$$a_i = T - (T - t_0) (v / \mu)^{i-1}, \quad i = 1, 2, \dots, \\ J^* = \max [|x^0 - y^0| - (\mu - v) (T - t_0), 0]. \quad (18)$$

4) Движение объектов описывается уравнениями с начальными условиями и ограничениями

$$d^2x/dt^2 = u, \quad d^2y/dt^2 = v, \quad |u| \leq \mu, \quad |v| \leq v, \quad \mu > v > 0, \\ x(t_0) = x^0, \quad dx(t_0)/dt = \xi^0, \quad y(t_0) = y^0, \quad dy(t_0)/dt = \eta^0.$$

Здесь x, y, u, v — вектор-функции, x^0, y^0, ξ^0, η^0 — постоянные векторы. Используя подход п. 3, можно найти оптимальную стратегию и показать, что оптимальные моменты наблюдений и соответствующее значение функционала $J = |x(T) - y(T)|$ оказываются равными

$$a_i = T - (T - t_0) [(k^{i-1} - k^{N-1}) / (1 - k^{N-1})]^{1/2}, \\ k = v / \mu < 1, \quad i = 1, \dots, N, \\ J^* = \max [|z(t_0) - \xi(t_0)| - (\mu - v) (T - t_0)^2 / 2, \mu (T - t_0)^2 k^{N-1} \times \\ \times (1 - k) (1 - k^{N-1})^{-1} / 2], \\ z(t) = x(t) + (T - t) dx(t) / dt, \quad \xi(t) = y(t) + (T - t) dy(t) / dt.$$

Перейдя к пределу при $N \rightarrow \infty$ в формулах (19), получим *

$$a_i = T - (T - t_0) (v / \mu)^{(i-1)/2}, \quad i = 1, 2, \dots; \\ J^* = \max [|z(t_0) - \xi(t_0)| - (\mu - v) (T - t_0)^2 / 2, 0]. \quad (20)$$

Из решений примеров 3), 4) следует, что если T — момент поимки в соответствующих задачах преследования с полной информацией, то наблюдения в дискретные моменты, определяемые равенствами (18), (20), позволяют игроку X осуществить поимку игрока Y к тому же моменту T .

Институт проблем механики
Академии наук СССР
Москва

Поступило
22 VII 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ Р. Айзекс, Дифференциальные игры, М., 1967. ² Л. С. Понтрягин, УМН, 21, в. 4 (1966). ³ Н. Н. Красовский, Игровые задачи о встрече движений, М., 1970. ⁴ Ф. Л. Черноусько, ДАН, 188, № 4 (1969). ⁵ Б. Н. Соколов, Ф. Л. Черноусько, ПММ, 34, в. 5 (1970).

* Значения функционала (18), (20) совпадают с минимальными его значениями для игр с полной информацией. Следовательно, наблюдения в счетном числе точек (18), (20) позволяют стороне X добиться таких же значений функционала, как и непрерывные наблюдения.