Доклады Академии наук СССР
1972. Том 203, № 1

УДК 518.733.431 *МАТЕМАТИКА*

Ю. С. ОСИПОВ

МИНИМАКСНОЕ ПОГЛОЩЕНИЕ В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНЫХ ИГРАХ

(Представлено академиком Н. Н. Красовским 6 VIII 1971)

В статье даются достаточные условия успешного завершения дифференциально-разностной игры сближения, выясняется структура экстремальных стратегий сближения. В основе рассуждений лежит введенное в работе ([1]) понятие минимаксного программного поглощения, модифицированное для приложения к изучаемому кругу вопросов.

Статья примыкает к исследованиям ([1–7]).

Рассмотрим управляемую систему

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + A_\tau(t)x(t-\tau) + f(t, u, v). \tag{1}$$

Здесь x — n-мерный фазовый вектор; r_1-мерный вектор u и r_2-мерный вектор v — управляющие воздействия, подчиненные соответственно первому и второму игроку и стесненные условиями $u \in \mathscr{P}$, $v \in \mathscr{Q}$, где $\mathscr{P}$, $\mathscr{Q}$ — компакты; матрицы $A(t)$, $A_\tau(t)$ непрерывны на заданном промежутке $[t_0, \vartheta]$; функция $f(t, u, v)$ непрерывна на $[t_0, \vartheta] \times \mathscr{P} \times \mathscr{Q}$; $\tau = \mathrm{const} \geqslant 0$. В дальнейшем используются также следующие обозначения: $x_t(s) = x(t+s)$ (здесь и в дальнейшем s меняется в пределах $-\tau \leqslant s \leqslant 0$); E_n — эвклидово n-мерное векторное пространство, $\|x\|$ — символ нормы в E_n; $\mathscr{H}$ — пространство функций $x(s)$, суммируемых с квадратом $\|x(s)\|$, с нормой

$$\|x(s)\|_{\tau_1} = \left(\|x(0)\|^2 + \int_{-\tau}^{0} \|x(s)\|^2\, ds\right)^{1/2};$$

$C_{[-\tau, 0]}$ — пространство непрерывных функций $x(s)$ с нормой $\|x(s)\|_{\tau 2} = \max_s \|x(s)\|$. Символом $\mathscr{B}$ будем обозначать любое из конкретных пространств $\mathscr{H}$ или $C_{[-\tau, 0]}$, $\|x(s)\|_\tau$ — норма в $\mathscr{B}$. Позицией игры будем называть пару $p = \{t, x(s)\}$, $t \in [t_0, \vartheta]$, $x(s) \in \mathscr{B}$. Стратегией U первого игрока называется правило, ставящее в соответствие каждой позиции p множество $\mathscr{U}(p) \subset \mathscr{P}$. Второй игрок может выбрать любой способ формирования управляющего воздействия v, вырабатывающий измеримую на $[t_0, \vartheta]$ реализацию $v = v[t]$ со значениями в $\mathscr{Q}$.

Пусть символ Δ означает покрытие отрезка $[t_0, \vartheta]$ полуинтервалами $[\tau_i, \tau_{i+1})$, $\tau_0 = t_0$, $i = 0, 1, \ldots$, $\delta = \sup_i (\tau_{i+1} - \tau_i)$. Пусть $p_0 = \{t_0, x_0(s)\}$ — заданная позиция. Аппроксимационным движением $x[t, p_0, U]_\Delta$ называется всякая абсолютно непрерывная на $[t_0, \vartheta]$ функция $x[t]_\Delta$, удовлетворяющая условию $x[t_0 + s]_\Delta = x_0(s)$ и при почти всех t равенству

$$\dot{x}[t]_\Delta = A(t)x[t]_\Delta + A_\tau(t)x[t-\tau]_\Delta + f(t, u[t], v[t]),$$

где

$$u[t] = u[\tau_i] \in \mathscr{U}(\tau_i, x_{\tau_i}[s]_\Delta), \quad \tau_i \leqslant t < \tau_{i+1}, \quad i = 0, 1, \ldots$$

Функция $x[t, p_0, U]$ называется движением системы (1) из позиции p_0, отвечающим стратегии U, если существует последовательность покрытий $\{\Delta_j\}$ с $\{\delta_j\} \to 0$ такая, что некоторая последовательность движений $x[t, p_0,$

$U]_{\Delta j}$ равномерно сходится к $x[t, p_0, U]$ на $[t_0, \vartheta]$. Множество движений $x[t, p_0, U]$ не пусто.

Задача 1. Заданы система (1), отрезок времени $[t_0, \vartheta]$, начальная позиция $p_0 = \{t_0, x_0(s)\}$ и замкнутое множество $\mathscr{M}$. Требуется построить стратегию U^0 первого игрока, гарантирующую выполнение условия $x[\vartheta] \in \mathscr{M}$ для любого движения $x[t] = x[t, p_0, U]$ (т. е. при любом способе формирования управления v второго игрока).

Введем определения. Пусть каждому $t \in [t_0, \vartheta]$ поставлено в соответствие непустое множество $\mathscr{W}_t \subset \mathscr{B}$. Положим

$$r(t, x(s)) = \inf_{z \in \mathscr{W}_t} \| x(s) - z(s) \|_\tau.$$

Пусть $\{z^{(k)}(s)\}$ — некоторая минимизирующая для функционала $\|x(s) - z(s)\|_\tau$ последовательность элементов $\mathscr{W}_t$. Символом $Z(t, x(s))$ обозначим множество частичных пределов последовательности векторов $\{z^{(k)}(0)\}$. Пусть также $\mathscr{W}_{t0} = \{y = z(0) \mid z(s) \in \mathscr{W}_t\}$.

Определение 1. Экстремальный по минимаксу к системе множеств $\mathscr{W}_t$, $t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta$, назовем стратегию U^e первого игрока, задаваемую множествами $\mathscr{U}^e(p)$, построенными по правилу

$$\mathscr{U}^e(t, x(s)) = \{u_e \mid \min_{v \in \mathscr{Q}} (z - x(0)) f(t, u_e, v) = \max_{u \in \mathscr{P}} \min_{v \in \mathscr{Q}} (z - x(0)) f(t, u, v)\}$$

по крайней мере при одном $z \in Z(t, x(s))$.

Пусть $\mathscr{V}(t, u)$ — функция, которая ставит в соответствие каждой паре $\{t, u\}$ замкнутое подмножество $\mathscr{V}(t, u) \subset \mathscr{Q}$, причем так, что множество

$$\mathscr{F}(t, \mathscr{V}) = \mathrm{co}\{f(t, u, v) \mid v \in \mathscr{V}(t, u), \quad u \in \mathscr{P}\}$$

полунепрерывно сверху по включению по изменению t. Движением $x(t, p_0, \mathscr{V})$ назовем всякую абсолютно непрерывную на $[t_0, \vartheta]$ функцию $x(t)$, удовлетворяющую условию $x(t_0 + s) = x_0(s)$ и при почти всех t включению

$$\dot{x}(t) \in A(t)x(t) + A_\tau(t)x(t - \tau) + \mathscr{F}(t, \mathscr{V}).$$

Определение 2. Систему множеств $\mathscr{W}_t$, $t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta$, назовем сильно u-стабильной по минимаксу, если выполнено условие: каковы бы ни были позиция $p_* = \{t_*, v_*(s)\}$, $t_* \in [t_0, \vartheta)$, $x_*(s) \in \mathscr{W}_{t*}$, момент $t^* \in (t_*, \vartheta]$ и функция $\mathscr{V}(t, u)$, среди движений $x(t, p_*, \mathscr{V})$ есть движение $x(t)$ со свойством $x_{t^*}(s) \in \mathscr{W}_{t^*}$.

Справедлива

Теорема 1. *Пусть система множеств $\mathscr{W}_t$, $t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta$, сильно u-стабильна по минимаксу и $\mathscr{W}_{\vartheta 0} \subset \mathscr{M}$. Пусть начальная позиция игры $p_0 = \{t_0, x_0(s)\}$ такова, что $r(t_0, x_0(s)) = 0$.*

Тогда стратегия U^e первого игрока, экстремальная к системе множеств $\mathscr{W}_t$, $t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta$, разрешает задачу 1.

Рассмотрим вопрос о построении системы множеств $\mathscr{W}_t$, $t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta$, удовлетворяющей условиям теоремы 1. Эти множества можно определять, исходя из условия позиционного поглощения по минимаксу, которое является трансформацией понятия позиционного поглощения из ([5]) в соответствии с изменениями, отвечающими определениям из ([1]). Множества $\mathscr{W}_t$ можно конструировать и на основе соответствующей понятной процедуры ([2, 3, 6, 7]), также трансформированной здесь в соответствии с понятием минимаксного поглощения (см. аналогичный случай в ([1])). Однако здесь мы обсудим возможность выбора в качестве $\mathscr{W}_t$ более эффективно конструируемых множеств программного по минимаксу поглощения.

Определение 3. Множеством минимаксного программного поглощения $\mathscr{W}_t(\vartheta)^0$ назовем совокупность всех элементов $x(s) \in \mathscr{B}$, удовлетворяющих условию: какова бы ни была функция

$\mathscr{V}(t, u)$, среди движений $x(\xi, \{t, x(s)\}, \mathscr{V})$ есть по крайней мере одно движение, которое встречается с $\mathscr{M}$ в момент ϑ.

Если некоторая система множеств $\mathscr{W}_t$, $t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta$, сильно u-стабильна и $\mathscr{W}_{\vartheta 0} \subset \mathscr{M}$, то $\mathscr{W}_t \subset \mathscr{W}_t(\vartheta)^0$. Поэтому представляют интерес условия сильной стабильности самих множеств $\mathscr{W}_t(\vartheta)^0$. Такие достаточные условия получаются трансформацией соответствующих условий из ([5]) для случая системы (1) при замене свойств поглощения из ([5]) на свойства минимаксного поглощения, определенного выше в соответствии с ([1]).

Пусть $\mathscr{M}$ — замкнутое выпуклое множество.

Теорема 2. *Элемент $x(s) \in \mathscr{B}$ принадлежит множеству $\mathscr{W}_t(\vartheta)^0$ тогда и только тогда, когда*

$$\inf_{\|l\|=1} \{r(\vartheta, t, l) - \inf_{q \in \mathscr{M}} lq + \langle lT(\vartheta, t, s), x(s)\rangle\} \geqslant 0. \tag{2}$$

Здесь l — n-мерный вектор; величина

$$r(\vartheta, t, l) = \int\limits_t^{\vartheta} \max_{u \in \mathscr{P}} \min_{v \in Q} l\mathscr{F}(\vartheta, \xi) f(\xi, u, v)\, d\xi;$$

матрица $\mathscr{F}(\vartheta, \xi)$ удовлетворяет при почти всех $\xi \leqslant \vartheta$ уравнению

$$\partial\mathscr{F}(\vartheta, \xi) / \partial\xi = -\mathscr{F}(\vartheta, \xi) A(\xi) - \mathscr{F}(\vartheta, \xi + \tau) A_\tau(\xi + \tau),$$

и $\mathscr{F}(\vartheta, \vartheta) = E$, $\mathscr{F}(\vartheta, \xi) \equiv 0$ при $\xi > \vartheta$; величина $T(\vartheta, t, 0) = \mathscr{F}(\vartheta, t)$; $T(\vartheta, t, s) = \mathscr{F}(\vartheta, t + \tau + s) A_\tau(t + \tau + s)$ при $-\tau \leqslant s < 0$; величина $\langle x(s), y(s)\rangle = x(0)y(0) + \int\limits_{-\tau}^{0} x(s)y(s)\,ds$.

Будем в дальнейшем предполагать, что $\mathscr{B} = \mathscr{H}$. Пусть t_*, t^* — некоторые числа из $[t_0, \vartheta]$. Обозначим

$$\mathscr{E}_1(t_*, t^*) = \\ = \{l \mid \|l\| = 1, \inf_{y \in \mathscr{W}_{t_*}} \langle lT(\vartheta, t_*, s), y\rangle = -\infty, \quad \inf_{y \in \mathscr{W}_{t_*}} \langle lT(\vartheta, t^*, s), y\rangle = -\infty\}.$$

Дополнение $\mathscr{E}_1(t_*, t^*)$ до единичной сферы $\|l\| = 1$ обозначим символом $\mathscr{E}_2(t_*, t^*)$. (Из (2) вытекает, что если множество $\mathscr{M}$ ограничено, то $\mathscr{E}_1(t_*, t^*) = \phi$.} Введем функцию

$$\alpha(l, t_*, t^*) = \begin{cases} \inf\limits_{y \in \mathscr{W}_{t_*}} \langle lT(\vartheta, t_*, s), y\rangle - \inf\limits_{y \in \mathscr{W}_{t^*}} \langle lT(\vartheta, t, s), y\rangle, & \text{если } l \in \mathscr{E}_2(t_*, t^*); \\ \infty, & \text{если } l \in \mathscr{E}_1(t_*, t^*). \end{cases}$$

Теорема 3. *Система множеств $\mathscr{W}_t(\vartheta)^0$, $t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta$, сильно u-стабильна по минимаксу тогда и только тогда, когда при любых $t_* \in [t_0, \vartheta)$, $t^* \in (t^*, \vartheta]$ выполняется неравенство*

$$\inf_{\|l\|=1} \{\int\limits_{t_*}^{t^*} \max_{u \in \mathscr{P}} \min_{v \in Q} l\mathscr{F}(\vartheta, \xi) f(\xi, u, v)\, d\xi - \inf_{q \in \mathscr{M}} lq + \alpha(l, t_*, t^*)\} \geqslant 0.$$

Обозначим символом $\{x\}_m$ вектор, составленный (не нарушая порядка) из первых m координат вектора x. Символом $\tilde{l}$ обозначим n-мерный вектор вида $\tilde{l} = \{l_1, \ldots, l_m, 0, \ldots, 0\}$.

Следствие. *Пусть множество $\mathscr{M}$ описывается условием $x \in \mathscr{M}$ тогда и только тогда, когда $\{x\}_m \in \mathscr{M}_0$, где $\mathscr{M}_0$ — выпуклый компакт в E_m $(m \leqslant n)$. Если при любом $t \in [t_0, \vartheta]$ функция $r(\vartheta, t, \tilde{l})$ выпукла по $\tilde{l}$,* *то система множеств программного минимаксного поглощения сильно u-стабильна по минимаксу.*

Примечание. Если множество $\mathcal{M}$ выпукло и система множеств $\mathcal{W}_t(\vartheta)^0$, $t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta$, сильно u-стабильна по минимаксу, то стратегия U^e, разрешающая задачу 1, формализуется также в рамках дифференциально-разностных уравнений в контингенциях подобно ([4]).

Автор выражает благодарность акад. Н. Н. Красовскому за постановку задачи и советы.

Институт математики и механики
Уральского научного центра
Академии наук СССР
Свердловск

Поступило
10 VII 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Н. Н. Красовский, ДАН, **201**, № 2 (1971). [2] Л. С. Понтрягин, ДАН, **175**, № 4, 764 (1967). [3] Б. Н. Пшеничный, ДАН, **184**, № 2, 285 (1969). [4] Н. Н. Красовский, Ю. С. Осипов, ДАН, **197**, № 4 (1971). [5] Ю. С. Осипов, ДАН, **196**, № 4 (1971). [6] Н. Н. Красовский, А. И. Субботин, ДАН, **196**, № 2 (1971). [7] Ю. С. Осипов, ДАН, **197**, № 5 (1971).