

УДК 518:517.944.947

МАТЕМАТИКА

С. Г. МИХЛИН

О КООРДИНАТНЫХ СИСТЕМАХ
ВАРИАЦИОННО-РАЗНОСТНОГО МЕТОДА

(Представлено академиком В. И. Смирновым 22 III 1971)

1. Рассмотрим невырождающийся сильно эллиптический оператор A , который действует из $W_2^{(2s)}(\Omega) \cap \dot{W}_2^{(s)}(\Omega)$ в $L_2(\Omega)$ по формуле

$$Au = \sum_{|\alpha|, |\beta|=0}^s (-1)^{|\alpha|} D^\alpha (A_{\alpha\beta}(x) D^\beta u). \quad (1)$$

Здесь Ω — конечная область m -мерного евклидова пространства E_m , $u(x)$ — k -компонентный ($k \geq 1$) вектор, $A_{\alpha\beta}(x)$ — квадратные матрицы порядка k , элементы которых суть функции, измеримые и ограниченные в Ω .

Задачи вида $Au = f$ или $Au - \lambda u = 0$, $u \neq 0$, как известно, можно решать вариационно-разностным методом. Ниже строится некоторый класс координатных систем для этого метода и указываются условия полноты такой системы в $W_p^{(s)}(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$.

2. На множестве векторов пространства E_m введем частичное упорядочение: если $a = (a_1, a_2, \dots, a_m)$ и $b = (b_1, b_2, \dots, b_m)$, причем $a_n \leq b_n$, $n = 1, 2, \dots, m$, то будем писать $a \leq b$. Такое же упорядочение введем и для мультииндексов размерности m . Введем еще следующие обозначения. Вектор, все составляющие которого равны нулю, будем обозначать символом 0 , аналогичный смысл имеют обозначения 1 и 2 . Вектор, каждая составляющая которого равна либо нулю, либо единице, будем обозначать через i , а множество всех таких векторов — через I . Кубы $0 \leq t \leq 1$ и $0 \leq t \leq 2$ будем обозначать через Q и $\tilde{Q}$ соответственно.

Построим кубическую сетку с шагом $2h$ и выделим из нее сеточную область Ω^h , аппроксимирующую данную область Ω , так, чтобы расстояние между границами $\partial\Omega$ и $\partial\Omega^h$ было величиной порядка h . Поместим начало координат в одном из узлов области Ω^h и направим оси координат по ребрам одного из кубов сетки. Через центр каждого из кубов области Ω^h проведем плоскости, параллельные координатным плоскостям; этот куб разобьется на 2^m меньших кубов с ребром h . В каждом меньшем кубе отметим его нижнюю вершину, обладающую тем свойством, что исходящие из нее ребра направлены так же, как оси координат. Любую вершину любого меньшего куба можно записать в виде jh , где j — целочисленный вектор. Множество векторов j , отвечающих нижним вершинам меньших кубов области Ω^h , обозначим через J .

Все вводимые ниже мультииндексы имеют размерность m .

3. Введем в рассмотрение скалярные функции $\omega_q(t)$, подчиненные следующим условиям: а) q — мультииндекс, $0 \leq |q| \leq s-1$; б) $\omega_q \in W_p^{(s)}(E_m) \cap C^{(s-1)}(E_m)$; в) $\text{supp } \omega_q \subset \tilde{Q}$. Потребуем еще, чтобы выполнялись соотношения

$$D^\alpha \omega_q(1) = \delta_{\alpha q}, \quad 0 \leq |\alpha|, \quad |q| \leq s-1. \quad (2)$$

Очевидно, на гранях куба $\tilde{Q}$ выполняются краевые условия

$$D^\alpha \omega_q(t) = 0, \quad 0 \leq |\alpha|, \quad |q| \leq s-1. \quad (3)$$

Функции $\omega_q(t)$ назовем исходными. Координатные функции вариационно-разностного метода зададим формулой

$$\varphi_{hqj}(x) = \omega_q(x/h - j); \quad 0 \leq |q| \leq s-1, \quad j \in J. \quad (4)$$

Если положить

$$v(x) = \sum_{j \in J} \sum_{|q|=0}^{s-1} a_{qj} \varphi_{hqj}(x), \quad a_{qj} = \text{const}, \quad (5)$$

то

$$a_{qj} = h^{|q|} D^q v(j+1)h. \quad (6)$$

Обозначим через Φ_h подпространство, натянутое на элементы (4) при фиксированном h . Будем, как обычно, говорить, что система (4) полна в некотором пространстве, если в нем плотно объединение $\bigcup_{n=1}^{\infty} \Phi_{h_n}$, какова бы ни была последовательность $h_n \rightarrow 0$.

Теорема. Для того чтобы система (4) была полна в $\tilde{W}_p^{(s)}(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, достаточно, а при $p > m$ и необходима, чтобы выполнялись тождества

$$\begin{aligned} & V\gamma, \quad 0 \leq |\gamma| \leq s, \quad 0 \leq t \leq 1, \\ & \sum_{\substack{|q|=0 \\ q \leq \gamma}}^{s-1} \sum_{i \in I} \frac{(1-i)^{\gamma-q}}{(\gamma-q)!} \omega_q(t+i) = \frac{t^\gamma}{\gamma!}. \end{aligned} \quad (7)$$

4. Рассмотрим некоторые частные случаи.

а) Если $m = 1$, то тождества (7) принимают вид

$$0 \leq t \leq 1, \quad \sum_{q=0}^{s-1} \frac{\omega_q(t)}{(s-q)!} = \frac{t^s}{s!}, \quad (8)$$

$$\omega_r(t+1) + \sum_{q=0}^r \frac{\omega_q(t)}{(r-q)!} = \frac{t^r}{r!}, \quad r = 0, 1, \dots, s-1.$$

Если при этом $s = 1$, то единственная в этом случае функция $\omega_0(t)$ определяется однозначно: $\omega_0(t) = t$, $0 \leq t \leq 1$; $\omega_0(t) = 2 - t$, $1 < t \leq 2$. Если же $s \geq 2$, то при $0 \leq t \leq 1$ можно произвольно задать функции $\omega_0(t), \dots, \omega_{s-2}(t) \in W_p^{(s)}(0, 1) \cap C^{(s-1)}[0, 1]$, но так, чтобы удовлетворялись равенства (2), а также краевые условия (3) при $t = 0$. Тождества (8) позволяют найти функцию $\omega_{s-1}(t)$ при $0 \leq t \leq 1$ и все функции $\omega_q(t)$ при $1 < t \leq 2$. Построенные таким образом функции $\omega_q(t)$ принадлежат классу $\tilde{W}_p^{(s)}(0, 2) \cap C^{(s-1)}[0, 2]$ и удовлетворяют соотношениям (2).

б) Если $m = 2$, $s = 1$, то тождества (7) сводятся к

$$\begin{aligned} & 0 \leq t_1, t_2 \leq 1, \quad \omega_{00}(t_1, t_2) + \omega_{00}(t_1, t_2 + 1) = t_1, \\ & \omega_{00}(t_1, t_2) + \omega_{00}(t_1 + 1, t_2) = t_2, \\ & \omega_{00}(t_1, t_2) + \omega_{00}(t_1 + 1, t_2) + \omega_{00}(t_1, t_2 + 1) + \\ & \quad + \omega_{00}(t_1 + 1, t_2 + 1) = 1. \end{aligned} \quad (9)$$

Если задать функцию $\omega_{00}(t_1, t_2)$ в квадрате $Q = \{t: 0 \leq t \leq 1\}$, то равенства (9) позволяют доопределить ее на всем квадрате $\tilde{Q} = \{t: 0 \leq t \leq 2\}$. Доопределенная таким образом функция ω_{00} должна принадлежать классу $\tilde{W}_p^{(1)}(\tilde{Q}) \cap C(\tilde{Q})$ и удовлетворять соотношениям (2). Для этого необходимо и достаточно, чтобы заданная в Q функция $\omega_{00} \in W_p^{(1)}(Q) \cap$

$\cap C(Q)$ и чтобы она удовлетворяла следующим тождествам на сторонах квадрата Q :

$$\omega_{00}(t_1, 0) = \omega_{00}(0, t_2) = 0, \quad \omega_{00}(t_1, 1) = t_1, \quad \omega_{00}(1, t_2) = t_2. \quad (10)$$

Перечисленным условиям удовлетворяет, например, функция

$$t \in Q, \quad \omega_{00}(t_1, t_2) = \begin{cases} t_2, & t_2 \leq t_1, \\ t_1, & t_2 > t_1. \end{cases} \quad (11)$$

Можно принять также $\omega_{00}(t_1, t_2) = t_1 t_2$, $t \in Q$; в обоих случаях тождества (9) позволяют сразу вычислить значения функции ω_{00} на всем квадрате $\bar{Q}$.

с) Случай $m = s = 2$ сложнее предыдущего. В ⁽¹⁾ отмечена трудность построения координатных функций вариационно-разностного метода для бигармонического уравнения; в ⁽²⁾ такие функции строятся как решения некоторых бигармонических задач. Ниже приводится одна из совокупностей исходных функций, приводящая к полной системе координатных функций; исходные функции оказываются вполне элементарными, хотя и несколько громоздкими.

Обозначим соответственно через Q' , Q'' и Q''' квадраты $1 \leq t_1 \leq 2$, $0 \leq t_2 \leq 1$, $0 \leq t_1 \leq 1$, $1 \leq t_2 \leq 2$ и $1 \leq t_1, t_2 \leq 2$.

В рассматриваемом случае надо построить три функции $\omega_{00}(t_1, t_2)$, $\omega_{10}(t_1, t_2)$, $\omega_{01}(t_1, t_2)$; $0 \leq t \leq 2$. Тождества (7) в этом случае показывают, что можно задать функции ω_{10} и ω_{01} класса $W_p^{(2)} \cap C^{(1)}$ в квадратах Q , Q' , Q'' ; тогда эти функции определяются в Q''' , а функция ω_{00} — во всем квадрате $\bar{Q}$. Чтобы удовлетворить условиям (2) и (3), необходимо и достаточно, чтобы задаваемые функции удовлетворяли краевым условиям (3) на сторонах квадрата $\bar{Q}$, а также следующим условиям на прямых $t_1 = 1$ и $t_2 = 1$ внутри $\bar{Q}$, $0 \leq t_1, t_2 \leq 1$:

$$\omega_{10}(1, t_2) = 0, \quad \omega_{10}(1, t_2 + 1) = 0, \quad (12)$$

$$\omega_{10/1}(1, t_2) = t_2, \quad \omega_{01/1}(1, t_2 + 1) = 1 - t_2;$$

$$\omega_{01}(t_1, 1) = 0, \quad \omega_{01}(t_1 + 1, 1) = 0, \quad (13)$$

$$\omega_{01/2}(t_1, 1) = t_1, \quad \omega_{01/2}(t_1 + 1, 1) = 1 - t_1;$$

$$\omega_{10}(t_1, 1) - \omega_{10}(t_1 + 1, 1) = t_1^2 - t_1, \quad (14)$$

$$\omega_{0/2}(t_1, 1) - \omega_{0/2}(t_1 + 1, 1) = 0;$$

$$\omega_{01}(1, t_2) - \omega_{01}(1, t_2 + 1) = t_2^2 - t_2, \quad (15)$$

$$\omega_{0/1}(1, t_2) - \omega_{0/1}(1, t_2 + 1) = 0,$$

цифра под косой черточкой означает дифференцирование по соответствующему аргументу.

Покажем, как можно построить функцию $\omega_{10}(t_1, t_2)$ в квадрате Q ; для Q' и Q'' построения аналогичны. Если функция ω_{10} построена, то в силу симметрии задачи можно положить $\omega_{01}(t_1, t_2) = \omega_{10}(t_2, t_1)$.

Произвольно зададим значения $\omega_{10}(t_1, 1)$ и $\omega_{10/2}(t_1, 1)$; первое из них должно быть согласовано с первым из уравнений (12), а также с краевыми условиями на стороне $t_1 = 0$ и с условиями на (2). Можно положить, например, $\omega_{10}(t_1, 1) = t_1^2(t_1 - 1)$, $\omega_{10/2}(t_1, 1) = 0$. Тогда значения функции ω_{10} и ее нормальной производной делаются известными на всех сторонах квадратов Q , Q' , Q'' . Внутри квадрата Q эту функцию можно продолжить, например, по формуле

$$\omega_{10}(t_1, t_2) = \frac{t_1^2 t_2^2 (t_1 - 1)}{1 - t_1 + t_2} \left[t_1 - 1 + (3 - 2t_1)(t_2 - 1) + \frac{(t_2 - 1)^2}{2 - t_1 - t_2} \right]. \quad (16)$$

Легко видеть, что функция (16) в Q непрерывна и один раз непрерывно дифференцируема; ее вторые производные ограничены в Q и непрерывны всюду, кроме вершин $(1, 0)$ и $(1, 1)$.

5. Результаты ⁽³⁾, установленные там для одномерных дифференциальных операторов, распространяются на операторы (1).

а) Пусть v — число независимых скалярных коэффициентов в формуле (5) при данном фиксированном h . Вариационно-разностный метод позволяет найти приближенные значения v первых собственных чисел оператора (1). Пусть λ — наибольшее из них, и пусть еще λ_v означает v -е (в порядке неубывания) собственное число оператора (1). Тогда существует такая постоянная C , что $\lambda^{(v)} \leq C\lambda_v$.

б) Задачу $Au = f(x)$, где $f \in L_2(\Omega)$ — заданная функция и A — оператор (1), будем решать вариационно-разностным методом, полагая функцию $u(x)$ приближенно равной сумме (5). Набор коэффициентов a_{qj} можно рассматривать как вектор $a^{(h)}$ в евклидовом пространстве E_v . Пусть X_h и Y_h суть v -мерные гильбертовы пространства с нормами

$$\|a\|_{X_h} = h^{m/2} \|a\|_{E_v}, \quad \|a\|_{Y_h} = h^{-m/2} \|a\|_{E_v}.$$

Процесс вычисления коэффициентов a_{qj} из вариационно-разностной системы устойчив ^(4, 5) в паре пространств X_h, Y_h , а процесс вычисления приближенного решения устойчив в паре пространств H_A, Y_h , где H_A — энергетическое пространство оператора (1).

Утверждения настоящего пункта можно получить, используя результаты ⁽⁴⁾ или более поздние результаты ⁽⁶⁾.

Ленинградский государственный университет
им. А. А. Жданова

Поступило
16 III 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Л. А. Оганесян, Сборн. Решение инж. задач на электрон.-вычислит. машинах, 1963, стр. 84. ² Л. Х. Цовьян, Журн. вычислит. матем. и матем. физ., 8, № 1, 47 (1968). ³ С. Г. Михлин, ДАН, 198, № 1 (1971). ⁴ С. Г. Михлин, ДАН, 157, № 2, 271 (1964). ⁵ С. Г. Михлин, Численная реализация вариационных методов, «Наука», 1966. ⁶ Ю. К. Демьянович, ДАН, 164, № 1, 20 (1965).