Доклады Академии наук СССР
1971. Том 201, № 3

УДК 517.944.4

МАТЕМАТИКА

Е. С. ЗУХОВИЦКАЯ

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПЕРЕОПРЕДЕЛЕННЫХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

(Представлено академиком И. Г. Петровским 28 IV 1971)

В работе изучаются краевые задачи для систем $Pu = f$, где P — прямоугольная матрица произвольного размера, образованная дифференциальными операторами с переменными коэффициентами на многообразии с гладким краем. Если существуют аналогичные матрицы P_1, Q такие, что $PQ = 0$, $P_1P = 0$, то рассматриваемая система дополняется уравнениями $Q^*u = 0$ и для системы $Pu = f$, $Q^*u = 0$ ставится нормально разрешимая краевая задача при правых частях f, удовлетворяющих системе уравнений $P_1f = 0$. Доказывается также, что для любой переопределенной эллиптической системы псевдодифференциальных уравнений на многообразии без края существует система уравнений согласования для правых частей, выполнение которой обеспечивает ее нормальную разрешимость.

Другой метод нахождения нормально разрешимых краевых задач для случая, когда P — квадратная матрица, был предложен в ([1]). В этой работе матрица P образована дифференциальными операторами с постоянными коэффициентами, а ее ранг меньше ее порядка. Краевая задача для некоторых переопределенных систем второго порядка с постоянными коэффициентами рассмотрена ранее в ([2]).

Мы используем метод сведения краевой задачи к изучению некоторого оператора, действующего на границе области, предложенный в ([3], [4]).

1. Пусть X — гладкое n-мерное компактное многообразие без края; P_0 — матрица размера $l \times m$ $(l \geqslant m)$, элементами которой являются псевдодифференциальные операторы на X.

Порядком k оператора P_0 назовем максимальный порядок входящих в него операторов, а символом $P_0(\sigma(P_0))$ обозначим матрицу, получающуюся заменой всех элементов P_0 порядка k их символами, а элементов порядка меньше k — нулями.

$$\sigma(P_0) = \| a_{ij}^k(x, \xi) \|, \quad 1 \leqslant i \leqslant l, \quad 1 \leqslant j \leqslant m,$$

$a_{ij}^k(x, \xi)$ — однородные функции по ξ порядка k на кокасательном расслоении $T^*(X)$ многообразия X.

Оператор P_0 называется эллиптическим, если ранг $\sigma(P_0)$ максимален, т. е. равен m в каждой точке $(x, \xi) \in T^*(X)$, $\xi \neq 0$.

Рассмотрим систему $P_0u = f$, где P_0 — прямоугольная эллиптическая матрица, состоящая из псевдодифференциальных операторов.

Теорема 1. *Для любой прямоугольной эллиптической матрицы P_0, элементами которой являются псевдодифференциальные операторы порядка k на компактном многообразии X, существует матрица P_1', также состоящая из псевдодифференциальных операторов порядка k, обладающая следующими свойствами:*

1) *для любого s можно построить оператор T_s: $H_s \to H_\infty$ такой, что $P_1P_0 = 0$, где $P_1 = P_1' + T_s$;*

2) *оператор $P_0P_0^* + P_1^*P_1$ эллиптический. (Оператор P_1 называется оператором совместности системы $P_0u = f$.)*

Т е о р е м а 2. *Система* $P_0 u = f$ *нормально разрешима в пространствах* $u \in H^m_{s+k}(X)$, $f \in H_s^{l}(X)$ *при любых* f *таких, что* $P_1 f = 0$, *где* P_1 — *оператор совместимости.*

2. Теоремы 1, 2 используются при постановке нормально разрешимых краевых задач для систем

$$Pu = f, \tag{1}$$

где P — матрица любого размера $l_2 \times l_1$, элементами которой являются дифференциальные операторы на гладком n-мерном компактном многообразии Ω с гладким краем Γ.

Если существует оператор Q такой, что $PQ = 0$, то при любых граничных условиях ядро краевой задачи для (1) бесконечномерно. Это бесконечномерное ядро можно погасить условием $Q^*u = 0$, таким образом, вместо системы (1) будем рассматривать систему

$$Pu = f, \quad Q^*u = 0 \tag{2}$$

и ставить для нее нормально разрешимую краевую задачу

$$Bu|_\Gamma = \varphi. \tag{3}$$

С другой стороны, если существует оператор P_1 такой, что $P_1 P_0 = 0$, то необходимым условием разрешимости (2) является условие

$$P_1 f = 0. \tag{4}$$

Имеем, следовательно, комплекс

$$\mathscr{E}^{l_0}(\Omega) \xrightarrow{Q} \mathscr{E}^{l_1}(\Omega) \xrightarrow{P} \mathscr{E}^{l_2}(\Omega) \xrightarrow{P_1} \mathscr{E}^{l_3}(\Omega).$$

Предположим, что порядки операторов Q, P, P_1 одинаковы и равны k и что операторы $P^*P + QQ^*$ и $PP^* + P_1^*P_1$ эллиптичны. Тогда краевая задача (2), (3), (4) эквивалентна следующей краевой задаче для квадратной эллиптической системы с переопределенной системой граничных условий.

П р е д л о ж е н и е. *Если операторы* $P^*P + QQ^*$ *и* $PP^* + P_1^*P_1$ *эллиптичны, то задача* (2), (3), (4) *нормально разрешима в пространствах* $u \in H^{l_1}_{s+k}(\Omega)$, $f \in H_s^{l_2}(\Omega)$, $\varphi \in H^r_{s-k+1/2}(\Gamma)$ *тогда и только тогда, когда нормально разрешима следующая краевая задача:*

$$(P^*P + QQ^*)u = P^*f; \tag{5}$$

$$\nabla_k Pu = \nabla_k f, \quad \nabla_k Q^*u = 0, \quad Bu|_\Gamma = \varphi, \tag{6}$$

где ∇_k — *оператор сужения на границу вектор-функции и ее производных по внутренней нормали до порядка* $k - 1$:

$$\nabla_k h = \left(h|_\Gamma, \frac{\partial h}{\partial n}\bigg|_\Gamma, \ldots, \frac{\partial^{k-1} h}{\partial n^{k-1}}\bigg|_\Gamma\right).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Очевидно, что любое решение (2), (3), (4) удовлетворяет (5), (6). Установим обратное утверждение. Пусть u — решение (5), (6). Из (5) вытекает, что $PP^*Pu = PP^*f$. Кроме того, для любых u и f таких, что $P_1 f = 0$, имеем $P_1^*P_1Pu = P_1^*P_1 f$. Тогда $(PP^* + P_1^*P_1) \times \times (Pu - f) = 0$. Так как в силу граничных условий (6) $\nabla_k Pu = \nabla_k f$ имеем, в случае однозначной разрешимости задачи Дирихле для оператора $PP^* + P_1^*P_1$, $Pu = f$ в Ω. Тогда из (5) вытекает, что $QQ^*u = 0$. В силу граничных условий (6), $Q^*u = 0$ в Ω.

Таким образом, если задача Дирихле для $PP^* + P_1^*P_1$ однозначно разрешима, любое решение (5), (6) является решением (2), (3), (4) и, следовательно, эти задачи эквивалентны.

В общем случае рассматриваемая задача Дирихле имеет конечномерное ядро и утверждение об эквивалентности сохраняется, если правую часть f подчинить дополнительно конечному числу условий ортогональности.

3. Используя частное решение u' системы (5), сведем краевую задачу (5), (6) к краевой задаче для однородной системы

$$(P^*P + QQ^*)w = 0; \tag{7}$$

$$\nabla_k Pw = \nabla_k f', \quad \nabla_k Q^* w = \nabla_k u', \quad Bw|_\Gamma = \varphi'|_\Gamma. \tag{8}$$

Рассмотрим вспомогательную коэрцитивную задачу для (7), например, задачу Дирихле:

$$(P^*P + QQ^*)w = 0, \quad \nabla_k w = \psi.$$

Пусть R — регуляризатор этой задачи, т. е. R — оператор, удовлетворяющий соотношениям $R\nabla_k w = (I + T_1)w$, $\nabla_k R\psi = (I + T_2)\psi$, где T_i $(i = 1, 2)$ — сглаживающие операторы.

Лемма. *Краевая задача* (7), (8) *нормально разрешима тогда и только тогда, когда нормально разрешима следующая система псевдодифференциальных уравнений на границе:*

$$\nabla_k PR\psi = \nabla_k f', \quad \nabla_k Q^* R\psi = \nabla_k u', \quad BR\psi|_\Gamma = \varphi'|_\Gamma. \tag{9}$$

Доказательство леммы такое же, как доказательство аналогичного результата в ([4]).

Таким образом, оператор B, задающий граничные условия системы (2), (4), должен обеспечить нётеровость системы на границе (9). Выбором B мы можем добиться, например, того, чтобы система (9) была прямоугольной эллиптической. Но тогда, согласно теоремам 1, 2, у нее существуют условия совместности S, обеспечивающие ее нормальную разрешимость. Объединяя сказанное, приходим к теореме.

Теорема 3. *Предположим, что граничные условия B таковы, что система* (9) *эллиптична.*

Тогда существует псевдодифференциальный оператор S на Γ такой, что если функция φ подчинена условию $S(f|_\Gamma, \varphi) = 0$, то краевая задача (2), (3), (4) *нормально разрешима в пространствах* $u \in H^{l_1}_{s+k}(\Omega)$, $f \in H^{l_2}_s(\Omega)$, $\varphi \in H^{r}_{s-k+1/2}(\Gamma)$.

4. Возможен случай, когда система (2), (4) такова, что эквивалентная ей система псевдодифференциальных уравнений на границе имеет конечномерное ядро (например, субэллиптична ([5])). Тогда граничные условия задавать не нужно и система (2), (4) нормально разрешима в Ω.

5. В качестве примера рассмотрим на компактном комплексном многообразии Ω с гладкой границей Γ систему

$$\bar\partial u = f, \tag{10}$$

где u — функция, f — форма типа $(0, 1)$, $\bar\partial$ — оператор Коши — Римана.

Необходимым условием разрешимости (10) является условие $\bar\partial f = 0$. Ищется оператор B такой, что краевая задача

$$\begin{aligned} \bar\partial u &= f, \\ Bu|_\Gamma &= \varphi \end{aligned} \tag{11}$$

нормально разрешима в пространствах $u \in H_{r+1}(\Omega)$, $f \in H_r(\Omega)$, $\varphi \in H_{r-1/2}(\Gamma)$.

По общей схеме сводим краевую задачу (11) к системе псевдодифференциальных уравнений на границе

$$\bar\partial R\psi|_\Gamma = f'|_\Gamma, \quad BR\psi|_\Gamma = \varphi'|_\Gamma, \tag{12}$$

где R — регуляризатор задачи Дирихле для уравнения Лапласа. Оператор B должен обеспечивать нётеровость системы (12).

Если граница Γ состоит из двух компонент, $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_0$, где Γ_1 1-псевдовогнута, то оператор $\bar{\partial} R \psi |_{\Gamma_1}$ оказывается субэллиптическим и поэтому, согласно пункту 4, граничные условия на Γ_1 задавать не нужно. На оставшейся части границы Γ_0 в качестве матрицы B можно взять, например, скалярный псевдодифференциальный оператор вдоль границы с эллиптическим символом или оператор дифференцирования по нормали. При этом функция φ должна удовлетворять соотношению $S(f'|_\Gamma, \varphi) = 0$, где S — оператор согласования системы (12).

Рассматривая однородную задачу $(f = 0)$, находим, что функция φ, заданная на границе Γ многообразия Ω, тогда и только тогда голоморфно продолжается в Ω, когда она удовлетворяет условию $S_1\varphi = 0$, где S_1 — некоторый псевдодифференциальный оператор вдоль границы.

В заключение автор выражает благодарность В. П. Паламодову за постановку задачи и руководство работой.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
9 IV 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] И. С. Гудович, С. Г. Крейн, Матем. сборник, 84, в. 4 (1971). [2] М. И. Эскин, ДАН, 189, № 3 (1969). [3] Б. Р. Вайнберг, В. В. Грушин, Матем. сборн. 72, в. 4 (1965). [4] Б. Р. Вайнберг, В. В. Грушин, Матем. сборн., 73, в. 1 (1967). [5] Л. Хёрмандер, Сборник Псевдодифференциальные операторы, М., 1967, стр. 166. [6] J. J. Kohn, H. Rossi, Ann. Math., 81, № 3, 451 (1965).