

Л. А. САХНОВИЧ

О ПОДОБИИ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ

(Представлено академиком И. Г. Петровским 29 III 1971)

Будем рассматривать ограниченные вместе с обратными операторы T и T_0 , действующие соответственно в гильбертовых пространствах H и H_0 . В статье будут найдены необходимые и достаточные условия подобия операторов T и T_0 , формулируемые через характеристическую оператор-функцию. Применение общих теорем иллюстрируется на примере операторов с дискретным спектром.

Напомним некоторые определения. Операторы T и T_0 называются подобными, если существует ограниченный вместе с обратным оператор V , отображающий H_0 на H и такой, что

$$T = VT_0V^{-1}. \quad (1)$$

Пусть R — ограниченный оператор, отображающий некоторое гильбертово пространство G в H и удовлетворяющий условию

$$E - T^*T = RjR^*, \quad (2)$$

где j действует в G и $j = j^*$, $j^2 = E$.

Тогда существует ограниченный вместе с обратным оператор K , действующий в G и такой, что ⁽¹⁾

$$j - R^*R = K^*jK. \quad (3)$$

Оператору T ставится в соответствие характеристическая оператор-функция ⁽¹⁾

$$\theta(\xi) = jK^{*-1}[j - R^*(E - \xi T^*)^{-1}R]. \quad (4)$$

Значения оператор-функции $\theta(\xi)$ являются операторами, действующими в G . Пусть $E_s = \overline{RG}$. Оператор T называется простым относительно E_s , если

$$H = \overline{\sum_{k=-\infty}^{\infty} T^k E_s}. \quad (5)$$

Теорема 1. Пусть $\theta(\xi)$ — характеристическая оператор-функция простого оператора T . Для того чтобы T был подобен T_0 , необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

1) оператор-функция $\theta(\xi)$ допускает представление

$$\theta(\xi) = jK^{*-1}[j - \Gamma^*(E - \xi T_0^*)^{-1}\Pi], \quad (6)$$

где ограниченные операторы Π и Γ отображают G в H_0 ;

2) имеет место равенство

$$H_0 = \overline{\sum_{k=-\infty}^{\infty} T_0^{*k}\Pi G};$$

3) существует ограниченный вместе с обратным положительный оператор N , действующий в H_0 и удовлетворяющий соотношениям

$$N - T_0^* N T_0 = \Pi j \Pi^*; \quad (7)$$

$$N \Gamma = \Pi. \quad (8)$$

Если выполняются условия теоремы 1, то имеет место также равенство

$$H_0 = \overline{\sum_{k=-\infty}^{\infty} T_0^k \Gamma G}.$$

Запишем соотношение

$$E - T T^* = T^{*-1} R j R^* T^*. \quad (9)$$

Из (2) и (3) вытекает

$$T^* T R = R j K^* j K,$$

откуда получаем

$$E - T T^* = T R A R^* T^*; \quad (10)$$

$$A = K^{-1} j K^{*-1}. \quad (11)$$

Из (10) и (11) следуют равенства

$$T_0^{-1} M T_0^{*-1} - M = \Gamma A \Gamma^*; \quad (12)$$

$$M \Pi = \Gamma, \quad M = N^{-1}. \quad (13)$$

Далее приводятся результаты, помогающие установить положительность решений N и M операторных уравнений (7) и (12) и справедливость соотношений (8) и (13). Таким образом, вопрос о подобии T и T_0 сводится в существенном к решению операторных уравнений (7) и (12). В ряде конкретных важных случаев эти уравнения решаются сравнительно просто (²⁻⁴).

Заметим еще, что условие (2) теоремы 1 не является существенным.

Рассматривая T_0^* на подпространстве $H'_0 = \overline{\sum_{k=-\infty}^{\infty} T_0^k \Pi G}$, мы добиваемся выполнения этого условия.

Теорема 2. Пусть выполняются условия (1), (2) теоремы 1 и существует ограниченный оператор N , удовлетворяющий соотношениям (7), (8).

Тогда оператор N — неотрицательный.

Теорема 3. Пусть выполняются условия (1), (2) теоремы 1 и существуют ограниченные операторы N и M , удовлетворяющие соотношениям (7), (8) и (12), (13).

Тогда операторы N и M взаимно обратные.

Пользуясь теоремами 2 и 3, переформулируем теорему 1.

Теорема 4. Для того чтобы простой оператор T был подобен T_0 , необходимо и достаточно выполнение условий (1), (2) теоремы 1, а также условия

3') существуют ограниченные операторы N и M , удовлетворяющие соотношениям (7), (8) и (12), (13).

Если ξ_0 — регулярная точка операторов T_0^{*-1} и T_0 , то

$$\theta(\xi_0) j \theta^*(1/\xi_0) = \theta^*(1/\xi_0) j \theta(\xi_0) = j. \quad (14)$$

Из (14) вытекает

Теорема 5. Пусть $\theta(\xi)$ — характеристическая оператор-функция оператора T , допускающая представление (6). Пусть далее N и M — ограниченные решения операторных уравнений (7) и (12), а ξ_0 — точка регулярности операторов T_0^{*-1} и T_0 .

Тогда в некоторой окрестности ξ_0 выполняются равенства

$$\Gamma^* (T_0^{*-1} - \xi E)^{-1} (N\Gamma - \Pi) = (\Gamma^* N - \Pi^*) (T_0 - \xi E)^{-1} \Gamma; \quad (15)$$

$$(\Pi^* M - \Gamma^*) (E - \xi T_0^*)^{-1} \Pi = \Pi^* (E - \xi T_0^{-1})^{-1} (M\Pi - \Gamma). \quad (16)$$

Заметим, что $\xi_0 = 0$ является точкой регулярности операторов T_0^{*-1} и T_0 .

Следствие. Пусть V_1 и V_2 — ограниченные операторы, действующие в G , причем области значений операторов ΓV_1 и ΠV_2 образуют порождающие системы соответственно операторов T_0 и T_0^* . Если еще выполняются условия теоремы 5, то из равенств

$$(N\Gamma - \Pi) V_1 = 0, \quad (M\Pi - \Gamma) V_2 = 0 \quad (17)$$

вытекает соответственно

$$N\Gamma = \Pi, \quad M\Pi = \Gamma. \quad (18)$$

Теорема 6. Пусть $s - \lim T_0^n = 0$ ($n \rightarrow +\infty$) и существует такое $m > 0$, что $\|T_0^{-n}\| \geq m$ ($n = 1, 2, \dots$).

Тогда операторные уравнения (7) и (12) имеют не больше чем по одному решению.

Обозначим через $\sigma(T)$ спектральное множество оператора T . Из результатов (4) вытекает, в частности, что операторные уравнения (7) и (12) имеют по одному и только по одному ограниченному решению N и M , если

$$\sigma(T_0) \cap \sigma(T_0^{*-1}) = \emptyset. \quad (19)$$

Из теоремы 5 вытекает, что эти решения удовлетворяют условиям (8) и (13).

Теорема 7. Пусть $\theta(\xi)$ — характеристическая оператор-функция простого оператора T . Пусть далее справедливо соотношение (19). Для того чтобы T был подобен T_0 , необходимо и достаточно выполнение условий (1), (2) теоремы 1.

Теорема 8. Пусть $\theta(\xi)$ — оператор-функция, определенная формулой (6) и равенством $\theta(0) = K$, где K — ограниченный вместе с обратным оператор, действующий в G . Для того чтобы $\theta(\xi)$ была характеристической оператор-функцией некоторого простого оператора T , подобного T_0 , необходимо и достаточно выполнение условий (2), (3) теоремы 1.

На последнюю из приведенных теорем нас натолкнули исследования В. П. Потапова и его учеников (5), которые относятся к случаю, когда оператор T_0 действует в конечномерном пространстве H_0 и является нормальной формой Жордана.

Пусть ограниченный вместе с обратным оператор T_0 удовлетворяет условиям:

I) Часть спектра оператора T_0 , лежащая вне единичной окружности, состоит из последовательности изолированных точек ξ_k таких, что

$$\xi_k \bar{\xi}_l \neq 1, \quad 1 \leq k, l < \infty. \quad (20)$$

II) Точки ξ_k являются собственными числами оператора конечной кратности.

III) Система собственных и присоединенных векторов оператора T_0 , соответствующая точкам ξ_k , полна в H_0 .

Тогда из равенств (15), (16) непосредственно вытекает выполнение условий (8) и (13). Следовательно, в этом случае теорема 4 может быть переформулирована следующим образом.

Теорема 9. Пусть выполняются условия I) — III). Для того чтобы простой оператор T был подобен T_0 , необходимо и достаточно выполнения условий (1), (2) теоремы 1, а также условия

3'') существуют ограниченные операторы N и M , удовлетворяющие соотношениям (7) и (12).

Заметим, что условия (20) выполняются, если

$$|\xi_k| < 1, \quad 1 \leq k < \infty.$$

Сформулированная теорема 9 позволяет выводить условия базисности системы собственных и присоединенных векторов оператора T . Для этого в качестве T_0 следует взять соответствующую клеточно-диагональную матрицу. В этом случае уравнения (7) и (12) допускают явное решение. Условия базисности системы собственных и присоединенных векторов для оператора сжатия T выводились в работах ⁽⁶⁻⁸⁾.

Результаты, аналогичные теореме 9, получаются и в случае, когда T_0 является унитарным оператором с дискретным или сингулярным спектром. Условия подобия T унитарному оператору T_0 с абсолютно непрерывным спектром найдены в ^(2, 9), причем в ⁽²⁾ соответствующие операторы N и M построены в явном виде. При помощи изложенного выше метода отдельно рассмотрен случай, когда T_0 имеет вид ⁽³⁾

$$T_0 f = i \int_0^x f(t) dt j_0, \quad f \in L_m^2(0, \omega), \quad m < \infty,$$

где j_0 — диагональная матрица, имеющая структуру

$$j_0 = \left[\begin{array}{c|c} E_p & 0 \\ \hline 0 & -E_q \end{array} \right] \quad (p + q = m).$$

Одесский электротехнический
институт связи

Поступило
22 III 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ В. М. Бродский, И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн, Функц. анализ и его прилож., 4, в. 1 (1970). ² Л. А. Сахнович, Функц. анализ и его прилож., 2, в. 1 (1968). ³ Л. А. Сахнович, Матем. сборн., в печати. ⁴ Ю. Л. Далецкий, М. Г. Крейн, Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве, «Наука», 1970. ⁵ И. В. Ковалишина, В. П. Потапов, Изв. АН АрмССР, Физ.-матем. науки, 18, № 6 (1965). ⁶ И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн, Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов, «Наука», 1965. ⁷ В. Э. Кацнельсон, Функц. анализ и его прилож., 1, в. 2 (1967). ⁸ Н. К. Никольский, Б. С. Павлов, Зап. научн. сем. Ленингр. отд. Матем. инст. им. В. А. Стеклова, 11 (1968). ⁹ Л. А. Сахнович, Изв. АН СССР, сер. матем., 33, 52 (1969).