Доклады Академии наук СССР
1971. Том 201, № 3

УДК 513.83

МАТЕМАТИКА

Н. С. ЛАШНЕВ

О ФАКТОРНЫХ ОТОБРАЖЕНИЯХ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ

(Представлено академиком П. С. Александровым 28 IV 1971)

В работе ([3]) автором была доказана теорема, в которой утверждалось, что для любого непрерывного разбиения $\mathfrak{A} = \{A\}$ метрического пространства семейство всех тех $A \in \mathfrak{A}$, которые не являются компактами, есть объединение счетного числа дискретных подсемейств (σ-дискретно). Работами А. В. Архангельского ([2]) и Б. В. Филиппова ([5]) эта теорема была перенесена соответственно на случай p-пространств и симметризуемых пространств. Цель настоящей работы — перенести утверждение указанной теоремы на новый класс пространств, более широкий, чем класс симметризуемых паракомпактов.

Ниже все пространства будут предполагаться регулярными, а все отображения непрерывными.

1. ν-пространства и ζ-пространства.

Определение 1. Пусть X — пространство, в котором есть счетная последовательность консервативных покрытий $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ со свойствами: для любого $N_1 \subseteq N$ (где N — натуральный ряд, а N_1 бесконечно), $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ образует сеть пространства X. Назовем X ν-пространством.

Теорема 1. *Пусть $\mathfrak{A}$ — непрерывное разбиение ν-пространства X. Тогда все элементы этого разбиения, кроме, быть может, некоторого σ-дискретного их семейства, суть бикомпакты с пустым открытым ядром.*

Доказательство этой теоремы аналогично тому, что приводится в ([3]). Следует заметить, что ν-пространство по теореме Майкла паракомпактно. В этой связи следует привести пример ν-пространства, которое не может служить замкнутым образом метрического пространства.

Пример 1. Пусть $X = R^2$ — плоскость и $M_1, \ldots, M_n, \ldots$ — точки с координатами $(-1, 0), \ldots, (-1/n, 0), \ldots$, а $M_0 = (0, 0)$ — начало координат. Рассмотрим счетную последовательность прямых, параллельных оси Y: $R_1, R_2, \ldots, R_n, \ldots$, где $R_n = \{x = 1/n\}$. Через R_0 обозначим ось OY. Обозначим через Z пространство разбиения плоскости, в котором элементами служат, во-первых, прямые $R_0, R_1, \ldots, R_n, \ldots$, а также одноточечные множества $\{x\}$, где $x \notin \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} R_n$. Построенное нами отображение f: а) незамкнуто, б) неприводимо, в) непсевдооткрыто. Последнее свойство не так очевидно, как два первых, но в дальнейшем мы увидим, что всегда а) и б) влекут за собой в).

Рассмотрим в пространстве $X = R^2$ последовательность канонических замкнутых покрытий α_n, которые состоят из квадратов, заключенных между прямыми $x = m/2^n$, $x = (m+1)/2^n$, $y = (p+1)/2^n$, $y = p/2^n$. Последовательность покрытий α_n при отображении f переходит в последовательность консервативных замкнутых покрытий β_n, которые превращают Y в ν-пространство. Отметим еще одно свойство ν-пространств, которое будет для нас важно в дальнейшем. Пусть $x_0 \in X$, $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность консервативных покрытий. Рассмотрим последовательность окрестностей $O_n(x_0) = X \setminus \bigcup\limits_{\substack{k \leqslant n \\ A_k \not\ni x_0}} A_k$. Эта последовательность обладает свойствами:

а) $O_n(x_0) \supseteq O_{n+1}(x_0)$,

б) $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} O_n(x_0) = x_0$,

в) если $O_n(x_n) \ni x_0$, то $x_0 \in \left[\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} x_n\right]$.

Последнее свойство нуждается в доказательстве. Если $x_0 \in O_n(x_n)$, то любое $A_n \in \alpha_n$, содержащее x_0, содержит и x_n, но семейство всех $A_n|_{n=1}^{\infty}$, содержащих x_0, образует сеть в этой точке, поэтому $x_0 \in \left[\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} x_n\right]$. Введем теперь новое понятие.

Определение 2. Пусть каждой точке x пространства X поставлена в соответствие счетная последовательность окрестностей $O_n(x)$ со свойствами а), б), в). Назовем X ζ-пространством.

Класс ζ-пространств весьма широк. Достаточно сказать, что в нем содержатся все симметризуемые пространства и все пространства с измельчающейся последовательностью покрытий. Только что мы убедились, что каждое ν-пространство является ζ-пространством. Обратное утверждение, разумеется, неверно, так как пример Немыцкого дает нам пример пространства с измельчающейся последовательностью покрытий, но не точечно паракомпактного.

Ниже нам потребуются еще два понятия.

Определение 3. Пусть в каждое открытое покрытие пространства X можно вписать минимальное подпокрытие, т. е. такое, которое не содержит никакого собственного подпокрытия. Назовем пространство X η-пространством.

Определение 4. Пусть каждое счетное дискретное семейство точек в пространстве X имеет дискретное семейство окрестностей. Назовем X θ-пространством.

Теорема 2. *Пусть $\mathfrak{A}$ — непрерывное разбиение ζ, η, θ-пространства X. Тогда все $A \in \mathfrak{A}$ суть нигде не плотные бикомпакты, за исключением, быть может, σ-дискретного семейства множеств.*

По поводу понятия θ-пространства полезно заметить, что каждое нормальное и каждое счетно паракомпактное пространство есть θ-пространство, но пространство Немыцкого вполне регулярно и квазинормально, но не является θ-пространством.

2. Полуметрика. Пусть X — топологическое регулярное пространство и задано отображение множества $X \times X$ во множество всех действительных чисел, обладающее свойствами:

а) $\rho(x, x) = 0$,

б) $\rho(x_1, x_2) = 0 \Rightarrow x_1 = x_2$,

в) $\rho(M, x) = 0 \Rightarrow x \in [M]$.

Через $\rho(x_1, x_2)$ обозначим образ упорядоченной пары точек из квадрата множества X. Важно отметить, что функция $\rho(x_1, x_2)$ несимметрична. Если же M — множество из пространства X, то через $\rho(M, x)$ обозначим нижнюю границу множества чисел $\rho(x_1, x)$ $(x_1 \in M)$.

Каждое пространство с полуметрикой является ζ-пространством, а каждое симметризуемое пространство обладает полуметрикой. Важнейший пример несимметризуемого пространства с полуметрикой — стрелка. При сравнении пространства с полуметрикой с O-метризуемыми пространствами сразу выявляется существенное различие между этими двумя понятиями: O-метрика — понятие локальное, а полуметрика — интегральное.

3. Слабо замкнутые и неприводимые отображения.

Определеие 5. Отображение метрического пространства X на топологическое пространство Y называется слабо замкнутым, если для любого $y \in Y$ и любого $\varepsilon > 0$

$$\operatorname{Int} f^{\#} O_{\varepsilon}(f^{-1}y) \ni y.$$

Предложение 1. *Если X — метрическое пространство, а f — слабо замкнутое отображение $X \to Y$, то Y — ζ-пространство.*

Следствие. *Если f — слабо замкнутое отображение метрического пространства X на точечно паракомпактное пространство Y, а $\mathfrak{A} = \{A\}$ — непрерывное разбиение пространства Y, то все $A \in \mathfrak{A}$, кроме, быть может, σ-дискретного их семейства, суть бикомпакты с пустым открытым ядром.*

Предложение 2. *Если f: $X \to Y$ — слабо замкнутое отображение метрического пространства X на T_1-пространство Y, то элементы соответствующего разбиения, имеющие непустое открытое ядро, образуют σ-дискретное семейство.*

Теорема 3. *Пусть X — метрическое пространство, локально бикомпактное, а f — неприводимое слабо замкнутое отображение этого пространства на пространство Y.*

Тогда множество всех тех точек из пространства Y, для которых $f^{-1}y$ небикомпактно, нигде не плотно.

Теорема 4. *Пусть f — неприводимое слабо замкнутое отображение полного в смысле Чеха метризуемого пространства на T_1-пространство Y. Тогда в Y есть всюду плотное множество типа G_δ, для любой точки которого $f^{-1}y$ — нигде не плотный бикомпакт.*

Интересно рассмотреть пример, похожий на пример из п. 1, но немного более сложный.

Пример 2. Рассмотрим на плоскости XOY ось абсцисс. Выбросим из этой прямой все точки, троичное разложение которых содержит хотя бы одну двойку. Получим локально бикомпактное пространство, каждая точка которого имеет окрестность, гомеоморфную канторову совершенному множеству C. Через каждую точку получившегося множества проведем вертикальную прямую и каждую такую прямую возьмем в качестве отдельного элемента разбиения. Все остальные элементы — это отдельные точки, не вошедшие ни в одну прямую. Пространство разбиения содержит уже континуум точке, в которых нарушена псевдооткрытость.

Сформулируем теперь два предложения, касающиеся неприводимых отображений топологических пространств.

Теорема 5. *Неприводимое псевдооткрытое отображение нормального пространства X на T_1-пространство Y замкнуто.*

Предложение 3. *Факторное неприводимое отображение нормального пространства X на T_1-пространство Y с первой аксиомой счетности бикомпактно.*

4. Консервативные системы множеств в метрическом пространстве.

Теорема 6. *Каждое замкнутое множество в метрическом пространстве имеет консервативную базу окрестностей.*

Доказательство. Пусть P — замкнутое множество, а α_n — локально конечное покрытие, в котором каждое множество имеет диаметр $< 1/n$. Для каждого n рассмотрим открытое покрытие $\beta_n = \bigwedge_{i=1} \alpha_i$. Положим $O(P)$ — объединение некоторого семейства множеств из системы $\bigcup_{n=1}^{\infty} \alpha_n$. При этом имеется в виду, что каждое $A_n \subseteq O(P)$ пересекает P. Систему всех таким образом построенных окрестностей множества P обозначим через ω. Рассмотрим в ω подсистему ω_1. Через Q обозначим тело системы ω_1. Возьмем произвольную точку x_0 такую, что $x_0 \in [Q]$ и $x_0 \notin$

$\notin [P]$. Обозначим через r расстояние от x_0 до P. Выберем натуральное n_1 так, что $n_1 > 1/r$. Тогда для любого A_n $(n > n_1)$ $x_0 \notin [A_n]$. Поэтому найдется такая окрестность $U(x_0)$, что $[U(x_0)] \cap [\bigcup_{n=n_1}^{\infty} A_n] = \Lambda$. Если $x_0 \in [Q]$, то это достигается лишь за счет того, что $x_0 \in [\bigcup_{n\leqslant n_1} \overset{*}{A_n}]$. Через A^* обозначим те A, которые имеют непустое пересечение с P. Но система $\bigcup_{n\leqslant n_1} \alpha^u$ локально конечна. Поэтому $x_0 \in [A_{n_0}{}^0]$ при некотором n_0. Множество $A_{n_0}{}^0$ принадлежит α_{n_0}. Рассмотрим в α_{n_0} конечное множество $s_0(x_0)$ элементов, у которых замыкания содержат точку x_0. Одно из них непременно входит в некоторое $O_0(P) \in \omega_1$. Обозначим его $A_{n_0}{}^1$, тогда $x_0 \in [A_{n_0}{}^0]$, чем и доказана наша теорема.

В заключение автор выражает глубокую благодарность В. И. Пономареву за внимание и ценные советы.

Тульский политехнический институт

Поступило 2 IV 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] П. С. Александров, П. С. Урысон, О компактных топологических пространствах, Тр. по топологии и другим областям математики, 2, 1951. [2] А. В. Архангельский, ДАН, 166, № 6 (1966). [3] Н. С. Лашнев, ДАН, 165, № 4 (1965). [4] E. Michael, Proc. Am. Math. Soc., 8, 822 (1957). [5] В. В. Филипов, ДАН, 176, № 3 (1968).