

УДК 519.45

МАТЕМАТИКА

Б. И. ПЛОТКИН

О ПОЛУГРУППЕ МНОГООБРАЗИЙ, СВЯЗАННЫХ С ПРЕДСТАВЛЕНИЯМИ ГРУПП

(Представлено академиком П. С. Новиковым 8 IX 1971)

1. Пусть K — ассоциативное и коммутативное кольцо с единицей. Будем рассматривать пары (G, Γ) , в которых G — левый K - и правый Γ -модуль. Кольцо K здесь предполагаем фиксированным, а группа Γ меняется. В частности, морфизмы пар действуют и на Γ . Наряду с группой Γ в G действует и групповая алгебра $K\Gamma$ и G можно трактовать также как правый $K\Gamma$ -модуль.

Пусть теперь F — свободная группа со счетным множеством свободных образующих Y , и пусть

$$u = u(y_1, \dots, y_n) = \sum_k \lambda_k f_k(y_1, \dots, y_n)$$

— произвольный элемент в KF . Здесь $\lambda_k \in K$ и $f_k(y_1, \dots, y_n) \in F$. Если в запись u вместо переменных $y_1, \dots, y_n$ подставить некоторые элементы $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ из группы Γ , то мы получим элемент $u(\gamma_1, \dots, \gamma_n)$, принадлежащий групповой алгебре $K\Gamma$. Если, далее, Γ действует в K -модуле G , то и $u(\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ действует в G . Будем говорить, что в паре (G, Γ) выполняется битожество $x \circ u \equiv 0$, если при любой замене переменных $y_1, \dots, y_n$ элементами из группы Γ соответствующий $u(\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ аннулирует модуль G .

Как обычно, теперь можно рассматривать классы пар, характеризующиеся некоторыми наборами битожеств. Такие классы называются многообразиями. Пусть, с другой стороны, $\mathfrak{X}$ — некоторый класс пар (над заданным K). Рассмотрим все u в KF , для которых во всех парах из $\mathfrak{X}$ выполняются битожества $x \circ u \equiv 0$. Все такие u составляют в KF двусторонний идеал U , выдерживающий все эндоморфизмы алгебры KF , индуцируемые эндоморфизмами группы F . Идеал с указанным свойством инвариантности относительно эндоморфизмов мы называем специальным идеалом. Между специальными идеалами в групповой алгебре KF и многообразиями пар над данным K имеется естественное взаимно однозначное соответствие.

Примером специального идеала в KF служит фундаментальный идеал. Ему отвечает многообразие пар с тривиальным действием. Это многообразие обозначим через S . Оно задается битожеством $x \circ (y - 1) \equiv 0$. Другие примеры можно получить из определяемых ниже операций над классами.

2. Пусть $\mathfrak{X}_1$ и $\mathfrak{X}_2$ — два класса пар. Их произведение $\mathfrak{X}_1 \mathfrak{X}_2$ состоит из пар (G, Γ) таких, что в G имеется Γ -инвариантный подмодуль H с $(H, \Gamma) \in \mathfrak{X}_1$ и $(G/H, \Gamma) \in \mathfrak{X}_2$. Относительно такого умножения многообразия образуют полугруппу, антиизоморфную полугруппе специальных идеалов в KF . Рассматривая, в частности, степени многообразия S , мы приходим к многообразиям стабильных пар: S^n есть многообразие n -стабильных пар. Соответствующий специальный идеал есть n -я степень фундаментального идеала. Многообразие S^n задается битожеством $x \circ (y_1 - 1) \dots (y_n - 1) \equiv 0$.

Пусть дальше $\mathfrak{X}$ — класс пар и θ — класс групп. Через $\mathfrak{X} \times \theta$ обозначим класс пар, определяемый следующим образом: $(G, \Gamma) \in \mathfrak{X} \times \theta$, если в группе Γ имеется такой нормальный делитель Σ , что $(G, \Sigma) \in \mathfrak{X}$ и $\Gamma/\Sigma \in \theta$. Нетрудно проверить, что если $\mathfrak{X}$ — многообразие пар и θ — групповое многообразие, то $\mathfrak{X} \times \theta$ есть многообразие пар. Кроме того, выполняются соотношения

$$(\mathfrak{X}_1 \mathfrak{X}_2) \times \theta = (\mathfrak{X}_1 \times \theta) (\mathfrak{X}_2 \times \theta), \quad (\mathfrak{X} \times \theta_1) \times \theta_2 = \mathfrak{X} \times \theta_1 \theta_2.$$

Непосредственно проверяется, что если многообразие θ определяется битождествами $x \circ u_\alpha \equiv 0$, $u_\alpha = u_\alpha(y_1, \dots, y_n)$, то многообразие $\mathfrak{X} \times \theta$ задается битождествами $x \circ u_\alpha(f_1, \dots, f_n) \equiv 0$, где $f_1, \dots, f_n$ — элементы вербальной θ -подгруппы в F .

В частности, можно говорить о многообразии пар $S \times \theta$, которое еще обозначается через $\omega\theta$. Это многообразие состоит из пар (G, Γ) таких, что вербальная подгруппа $\theta^*(\Gamma)$ принадлежит ядру соответствующего представления. Специальный идеал в KF , отвечающий многообразию пар $\omega\theta$, есть идеал $\omega\theta^*(F)$ — идеал, порожденный элементами вида $f - 1$, где f пробегает вербальную подгруппу $\theta^*(F)$.

Наряду с отображением ω рассмотрим еще отображение ω_θ , сопоставляющее каждому групповому многообразию θ многообразие пар $\omega_\theta\theta$, определяемое следующим образом. $(G, \Gamma) \in \omega_\theta\theta$, если для соответствующей точной пары $(G, \bar{\Gamma})$ полупрямое произведение $G \cdot \bar{\Gamma}$, отвечающее этой паре, принадлежит θ . В этом полупрямом произведении мы «забываем» кольцо K . Просто проверяется, что при любом θ класс пар $\omega_\theta\theta$ действительно является многообразием пар и это многообразие является собственным подмногообразием в $\omega\theta$. Если, в частности, θ есть бернсайдово многообразие, определяемое тождеством $y^n = 1$, то $\omega_\theta\theta$ есть «круговое» многообразие, определяемое битождеством $x \circ (1 + y + \dots + y^{n-1}) \equiv 0$. Легко также проверить, что если θ — многообразие n -ступенно нильпотентных групп, то $\omega_\theta\theta$ совпадает с S^n .

Очевидные соображения показывают, что $\omega\theta_1 = \omega\theta_2$ влечет $\theta_1 = \theta_2$, однако, как это видно из приведенных сейчас примеров, оператор ω_θ подобным свойством не обладает. По-видимому, было бы интересно исследовать отношения между многообразиями θ_1 и θ_2 , при которых выполняется $\omega_\theta\theta_1 = \omega_\theta\theta_2$, а также искать все θ с заданным $\omega_\theta\theta$. Нетрудно указать правило, позволяющее выписывать битождества многообразия $\omega_\theta\theta$ по известным тождествам группового многообразия θ , однако обратная задача здесь уже нетривиальна. Ее естественно рассматривать в различных конкретных случаях.

3. Как уже отмечалось, относительно операции умножения классов пар многообразия пар составляют полугруппу. Имеет место

Теорема 1. *При любом поле K полугруппа всех собственных многообразий пар над данным K есть свободная полугруппа.*

При этом собственное многообразие — это многообразие, отличное от многообразия всех пар и от нулевого многообразия — многообразия, в котором во всех парах соответствующий модуль нулевой.

Названная теорема параллельна известной теоретико-групповой теореме о свободе полугруппы групповых многообразий. Доказательство теоремы 1 приводится в отдельной совместной работе автора и А. С. Гришберга. Это доказательство использует специальную конструкцию треугольного умножения пар, которую мы сейчас определим.

Пусть (A, Σ_1) и (B, Σ_2) — две пары, и пусть (G, Σ) — их прямое произведение, $G = A + B$, $\Sigma = \Sigma_1 \times \Sigma_2$, и действие Σ в G определяется покомпонентно. Пусть дальше $\Phi = \text{Hom}(B, A)$ — аддитивная группа линейных отображений из B в A . Известным образом определяется действие группы $\Sigma_1 \times \Sigma_2$ в Φ : если $\varphi \in \Phi$, $\sigma_1 \in \Sigma_1$, $\sigma_2 \in \Sigma_2$, то при любом $b \in B$ имеем $b(\varphi \circ \sigma_1 \sigma_2) = ((b \circ \sigma_2^{-1})\varphi) \circ \sigma_1$. Так возникает пара (Φ, Σ) , и пусть $\Gamma = \Phi \lambda \Sigma$ — отвечающее этой паре полупрямое произведение.

Определяем дальше действие группы Γ в G . Сначала определим действие Φ в G . Пусть $\varphi \in \Phi$. Для любого $b \in B$ полагаем $b \circ \varphi = b + b\varphi$, а для $a \in A$ определим $a \circ \varphi = a$. Так мы приходим к паре (G, Φ) , и, кроме того, уже определена пара (G, Σ) . Если теперь $\gamma = \varphi\sigma$, $\varphi \in \Phi$ и $\sigma \in \Sigma$, то при любом $g \in G$ определяем $g \circ \gamma = (g \circ \varphi) \circ \sigma$. Простая проверка показывает, что так мы действительно приходим к паре (G, Γ) . Это и есть треугольное произведение исходных пар (A, Σ_1) и (B, Σ_2) . (Операция треугольного умножения пар изучается в ⁽¹⁾. Эта операция играет в теории многообразий пар такую же роль, какую сплетения групп играют в теории групповых многообразий.)

Полугруппу собственных многообразий пар обозначим сейчас через $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}(K)$. Применяя основной результат из ⁽²⁾ и ⁽³⁾ и используя соответствие ω , мы видим, что полугруппа $\mathfrak{M}$ имеет мощность, не меньшую, чем континуум. Вообще же эта мощность зависит от K , и точное ее значение нам неизвестно.

Естественно возникает задача описания свободных образующих полугруппы $\mathfrak{M}$ неразложимых многообразий. Некоторые серии таких найдены А. С. Гринбергом. Отметим еще, что, согласно предложению 1 из следующего пункта, многообразие $\omega\theta$ неразложимо при любом θ .

Если K не является полем, то соответствующая полугруппа $\mathfrak{M}(K)$ уже не свободна. Было бы интересно, например, исследовать эту полугруппу для целочисленных представлений — для случая, когда K есть кольцо целых чисел.

4. Обозначим теперь через $\mathfrak{N}$ полугруппу всех групповых многообразий, за исключением многообразия всех групп. $\mathfrak{N}$ есть свободная полугруппа с единицей. Как это видно из замечаний в п. 2, определенная там операция $\times$ задает представление полугруппы $\mathfrak{N}$ в качестве полугруппы эндоморфизмов полугруппы всех многообразий пар. Легко проверить, что при этом полугруппа $\mathfrak{M}$ инвариантна относительно действия $\mathfrak{N}$, и так мы приходим к полугрупповой паре $(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$. Две теоремы о свободе $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ мы соединим дальше в теорему о свободе пары $(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$ — действие $\mathfrak{N}$ в $\mathfrak{M}$ также оказывается свободным.

Приведем предложения, которые затем соберем в указанной теореме о свободе. Всюду дальше основное кольцо K является полем, все многообразия пар принадлежат $\mathfrak{M}$ и все θ — из $\mathfrak{B}$.

Предложение 1. Пусть $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}_1$ и $\mathfrak{Y}_2$ — многообразия пар, θ — групповое многообразие, и допустим, что они связаны соотношением $\mathfrak{X} \times \theta = = \mathfrak{Y}_1\mathfrak{Y}_2$.

Тогда найдутся такие $\mathfrak{X}_1$ и $\mathfrak{X}_2$, что $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}_1\mathfrak{X}_2$, $\mathfrak{Y}_1 = \mathfrak{X}_1 \times \theta$ и $\mathfrak{Y}_2 = \mathfrak{X}_2 \times \theta$.

Из этого предложения, в частности, следует, что если $\mathfrak{X}$ — неразложимое многообразие, то при любом θ многообразие $\mathfrak{X} \times \theta$ также неразложимо.

Доказательство предложения 1 использует треугольные произведения пар и еще смешанные сплетения пары и группы. Определим эту конструкцию (ср. ⁽⁴⁾, стр. 105).

Пусть (G, Σ) — пара и Γ — группа. Через $(G, \Sigma)^\Gamma = (G^\Gamma, \Sigma^\Gamma)$ обозначим декартову Γ -степень данной пары. Здесь G^Γ — K -модуль функций, определенных на Γ и со значениями в G , Σ^Γ — группа соответствующих функций, и действие Σ^Γ в G^Γ определяется покомпонентно. Регулярное действие группы Γ на множестве Γ индуцирует действие Γ в G^Γ и Σ^Γ . Последнее из них определяет группу $\Sigma \text{Wr } \Gamma$. Кроме того, действия Γ и Σ^Γ в G^Γ естественно продолжаются до действия группы $\Sigma \text{Wr } \Gamma$ в G^Γ . Так мы приходим к паре $(G^\Gamma, \Sigma \text{Wr } \Gamma)$, которая обозначается еще через $(G, \Sigma) \text{Wr } \Gamma$ и называется полным смешанным сплетением пары (G, Σ) и группы Γ . Соответственно определяются и дискретные смешанные сплетения.

Предложение 2. Если $\mathfrak{X}_1$ и $\mathfrak{X}_2$ — многообразия пар и θ — групповое многообразие, то $\mathfrak{X}_1 \times \theta = \mathfrak{X}_2 \times \theta$ влечет $\mathfrak{X}_1 = \mathfrak{X}_2$.

Многообразие пар $\mathcal{X}$ условимся называть неприводимым многообразием, если равенство $\mathcal{X} = \mathcal{X}_0 \times \theta$ возможно лишь при $\mathcal{X} = \mathcal{X}_0$ и θ , состоящем только из единичной группы. В действительности, легко понять, что при $\mathcal{X} = \mathcal{X}_0 \times \theta$ каждое из названных условий влечет второе условие.

Предложение 3. *Каждое собственное многообразие пар $\mathcal{X}$ можно представить в виде $\mathcal{X} = \mathcal{X}_1 \times \theta$, где $\mathcal{X}_1$ — неприводимое многообразие и θ — некоторое групповое многообразие.*

Предложение 4. *Если $\mathcal{X}_1$ и $\mathcal{X}_2$ — неприводимые многообразия, то $\mathcal{X}_1 \times \theta_1 = \mathcal{X}_2 \times \theta_2$ влечет $\mathcal{X}_1 = \mathcal{X}_2$ и $\theta_1 = \theta_2$.*

Предложения 2 и 4 доказываются с помощью смешанных сплетений.

Многообразие пар $\mathcal{X}$ условимся называть простым многообразием, если оно одновременно неразложимо и неприводимо. Из теоремы 1 и приведенных предложений получаем следующее

Предложение 5. *Каждое собственное многообразие пар $\mathcal{X}$ однозначно представимо в виде*

$$\mathcal{X} = (\mathcal{X}_1 \times \theta_1) (\mathcal{X}_2 \times \theta_2) \dots (\mathcal{X}_n \times \theta_n),$$

где $\mathcal{X}_i$ — простые многообразия и θ_i — некоторые многообразия из полугруппы $\mathcal{N}$.

5. Обратимся теперь к паре $(\mathcal{M}, \mathcal{N})$. Пусть M — система всех неразложимых элементов в $\mathcal{M}$ и пусть M_0 — все простые элементы. Согласно предложению 1 система M инвариантна относительно действия полугруппы $\mathcal{N}$. Для каждого $\mathcal{X}_\alpha \in M_0$ рассмотрим далее $\mathcal{N}$ -орбиту $\mathcal{X}_\alpha \times \mathcal{N}$, состоящую из всех $\mathcal{X}_\alpha \times \theta$, $\theta \in \mathcal{N}$. Здесь $\mathcal{X}_\alpha \in \mathcal{X}_\alpha \times \mathcal{N}$, и, применяя предложения 3 и 4, мы видим, что M распадается на такие непересекающиеся орбиты. Кроме того, понятно, что действие полугруппы $\mathcal{N}$ в каждой орбите $\mathcal{X}_\alpha \times \mathcal{N}$ эквивалентно правому «регулярному» представлению $\mathcal{N}$ на самой себе. Пусть дальше N — множество свободных образующих полугруппы $\mathcal{N}$. Из всего сказанного сейчас следует, что множества N и M_0 позволяют однозначно восстановить пару $(\mathcal{M}, \mathcal{N})$. Пусть, далее, $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ — произвольная полугрупповая пара, в которой $\mathcal{B}$ есть полугруппа с единицей, действующей тождественно. Тогда понятно, что каждую пару отображений

$$\mu_1: M_0 \rightarrow \mathcal{A} \quad \text{и} \quad \mu_2: N \rightarrow \mathcal{B}$$

можно однозначно продолжить до эпиморфизма пар

$$\mu: (\mathcal{M}, \mathcal{N}) \rightarrow (\mathcal{A}, \mathcal{B}).$$

Это и означает, что имеет место

Теорема 2. *При любом поле K полугрупповая пара $(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ свободна.*

Эта теорема приводит к важной здесь задаче исследования простых многообразий пар.

Поступило
4 VII 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Б. И. Плоткин, Треугольные произведения пар, Тр. алгебраического семинара, Рига, 1971. ² А. Ю. Ольшанский, Изв. АН СССР, сер. матем., 34, № 2, 376 (1970). ³ С. И. Адян, ДАН, 190, № 3, 499 (1970). ⁴ Б. И. Плоткин, Группы автоморфизмов алгебраических систем, М., 1966.