

А. Я. САГОМОНЯН

**ЦИЛИНДРИЧЕСКАЯ УПРУГАЯ ОБОЛОЧКА С ЖИДКОСТЬЮ
ПРИ ОСЕВЫХ УДАРНЫХ НАГРУЗКАХ ***

(Представлено академиком А. Ю. Ишлинским 21 IV 1971)

Рассматривается тонкостенная полубесконечная упругая цилиндрическая оболочка кругового сечения радиуса R с жестким дном, заполненная сжимаемой жидкостью. На дно оболочки в осевом направлении действует внешняя сила, зависящая от времени t и, возможно, от скорости и ускорения дна. Требуется определить параметры движения оболочки и жидкости. В отличие от обычной теории оболочек в настоящем исследовании определяются осредненные по малой толщине h параметры движения оболочки (1).

1. В меридианной плоскости xOy рассматриваемой осесимметричной задачи ось x направим по оси оболочки, ось y — перпендикулярно к ней, начало координат поместим у жесткого дна (рис. 1). Будем считать, что продольное смещение u оболочки не зависит от координаты y и, как обычно принято в теории оболочек, нормальное поперечное напряжение σ_y пренебрежимо мало по сравнению с нормальными кольцевым и осевым напряжениями σ_θ и σ_x . Проинтегрируем уравнения движения оболочки и соотношения, выражающие закон Гука, по малой толщине ее стенки h . Тогда, вводя осредненные по этой толщине напряжения и смещения, используя теорему о среднем и сделанные выше допущения, получим **

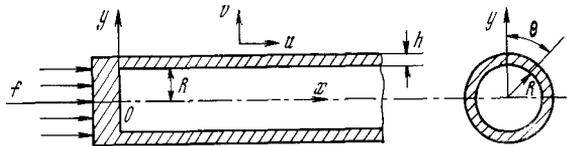


Рис. 1

используя теорему о среднем и сделанные выше допущения, получим **

$$\frac{\partial \tau}{\partial x} - \frac{\sigma_\theta}{R} + \frac{P(x, t)}{h} = \rho_1 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}; \quad \sigma_x = \rho_1 \left(a_1^2 \frac{\partial u}{\partial x} + k^2 \frac{v}{R} \right),$$

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = \rho_1 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}; \quad \sigma_\theta = \rho_1 \left(k^2 \frac{\partial u}{\partial x} + a_1^2 \frac{v}{R} \right), \quad \tau = \rho_1 a_2^2 \frac{\partial v}{\partial x}; \quad (1)$$

$$a_1^2 = \frac{4\mu}{\rho_1} \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} = \frac{1}{\rho_1} \frac{E}{1 - \sigma^2}; \quad k^2 = \sigma a_1^2; \quad a_2^2 = \frac{\mu}{\rho_1}. \quad (2)$$

В уравнениях (1), (2) σ_x , σ_θ , τ — соответственно осевое, кольцевое и касательное поперечное осредненные напряжения, u , v — осредненные продольное и поперечное смещения, λ , μ — коэффициенты Ламе, E , σ — модуль Юнга и коэффициент Пуассона, $P(x, t)$ — разность между давлением жидкости и ее начальным давлением P_0 , равным наружному давлению.

* Доложено на Ломоносовских чтениях в Московском государственном университете им. М. В. Ломоносова 23 III 1971 г.

** Если в основных уравнениях не учесть $\frac{\partial \tau}{\partial y} + \frac{\tau}{y} = \frac{1}{y} \frac{\partial y \tau}{\partial y}$, осреднение производить почленно, то вместо второго уравнения системы (1) получим

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\tau}{R} = \rho_1 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

Система уравнений (1) приводится к двум уравнениям в смещениях:

$$\begin{aligned} a_2^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{k^2}{R} \frac{\partial u}{\partial x} - a_1^2 \frac{v}{R^2} + \frac{P(x, t)}{\rho_1 h} &= \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \\ a_1^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{k^2}{R} \frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \end{aligned} \quad (3)$$

Начальными и граничными условиями уравнений (3) будут

$$\begin{aligned} t = 0, \quad x \geq 0, \quad u = v = \partial u / \partial t = \partial v / \partial t = 0, \quad P(x, 0) = 0; \\ t > 0, \quad x = 0, \quad m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = f + 2\pi R h \sigma_x(0, t) - \pi R^2 P(0, t), \quad v(0, t) = 0; \end{aligned} \quad (4)$$

здесь m — масса жесткого дна, f — внешняя сила.

На бесконечности ($x = \infty$) в течение всего времени движения оболочка и жидкость находятся в покое.

Решение системы (3) представляется в виде суммы решений уравнений

$$a_2^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{k^2}{R} \frac{\partial u}{\partial x} - a_1^2 \frac{v}{R^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \quad a_1^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{k^2}{R} \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (5)$$

с начальными и граничными условиями

$$\begin{aligned} t = 0, \quad x \geq 0, \quad u = v = \partial u / \partial t = \partial v / \partial t = 0; \\ t > 0, \quad x = 0, \quad m \partial^2 u / \partial t^2 = f + 2\pi R h \sigma_x(0, t) - \pi R^2 P(0, t), \\ v(0, t) = 0 \end{aligned} \quad (6)$$

и решений уравнений

$$a_2^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{k^2}{R} \frac{\partial u}{\partial x} - a_1^2 \frac{v}{R^2} + \frac{P(x, t)}{\rho_1 h} = \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \quad a_1^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{k^2}{R} \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (7)$$

с начальными и граничными условиями

$$\begin{aligned} t = 0, \quad x \geq 0, \quad u = v = \partial u / \partial t = \partial v / \partial t = 0; \\ t > 0, \quad x = 0, \quad m \partial^2 u / \partial t^2 = 2\pi R h \sigma_x(0, t). \end{aligned} \quad (8)$$

В силу граничных условий (8) уравнений (7), можно допустить, что возникшее под действием давления жидкости на боковую стенку оболочки осевое напряжение σ_x пренебрежимо мало по сравнению с напряжениями σ_θ и τ . Т. е. в этой задаче, наряду с σ_θ , полагаем равным нулю σ_x . Тогда вместо уравнений (7) с условиями (8) из системы (1) получим уравнение

$$a_2^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - c^2 \frac{v}{R^2} + \frac{P(x, t)}{h \rho_1} = \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \quad c^2 = \frac{E}{\rho_1}, \quad (9)$$

с начальными и граничными условиями

$$t = 0, \quad x \geq 0, \quad v = \partial v / \partial t = 0; \quad t > 0, \quad x = 0, \quad v(0, t) = 0. \quad (10)$$

К уравнениям (5), (9) необходимо присоединить уравнения движения жидкости в оболочке, которые рассматриваются в одномерном акустическом приближении

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x}, \quad \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{1}{\rho a^2} \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{2}{R} \frac{\partial v}{\partial t} = 0, \quad (11)$$

где ρ , w — плотность и скорость жидкости, a — скорость звука в ней. Для (11) имеем условия

$$\begin{aligned} t = 0, \quad x \geq 0, \quad w = \partial w / \partial t = 0; \\ t > 0, \quad x = 0, \quad w = w_0 = \partial u(0, t) / \partial t = \dot{u}(t). \end{aligned} \quad (12)$$

Затем во втором уравнении системы (11) учитывается основная часть поперечного смещения, возникающего за счет давления жидкости на боковую стенку оболочки.

С помощью уравнения (9) система (11) приводится к одному уравнению четвертого порядка для определения скорости жидкости (или давления в ней)

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) - a_2^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + \frac{c^2}{R^2} \left(\frac{1}{\lambda_0^2} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = 0, \quad (13)$$

$$\lambda_0^2 = \left(\frac{1}{a^2} + \frac{2\rho R}{hE} \right)^{-1}.$$

Если не учитывать инерцию стенок оболочки и поперечное касательное напряжение, то уравнение (13) переходит в известное уравнение второго порядка, описывающее распространение «гидравлического удара».

Уравнение (13) имеет две характеристические скорости

$$dx/dt = \pm a, \quad dx/dt = \pm a_2. \quad (14)$$

Исследование асимптотики решения уравнения (13) при малых значениях времени показывает, что волна со скоростью a_2 не вносит возмущения в жидкость. На этом основании (рассматривается начальный период движения) в уравнении (13) отбросим члены, учитывающие поперечное напряжение. В результате получим

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + \frac{c^2}{R^2} \left(\frac{1}{\lambda_0^2} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = 0. \quad (15)$$

Решения уравнений (5), (9) и (15) ищем с помощью преобразования Лапласа. Введем следующие соответствия между оригиналами и изображениями:

$$u(x, t) \div U(x, s), \quad v(x, t) \div V(x, s), \quad v_1(x, t) \div V_1(x, s), \quad (16)$$

$$w(x, t) \div W(x, s), \quad P(x, t) \div Q(x, s).$$

Здесь через v_1 и V_1 обозначены соответственно решение уравнения (9) и его изображение, s — комплексный параметр преобразования Лапласа.

После решения соответствующих обыкновенных дифференциальных уравнений изображения (16) представляются в виде

$$U = C_1 \left\{ \left(a_2^2 \gamma_1^2 - s^2 - \frac{a_1^2}{R^2} \right) \exp(x\gamma_1) - \frac{\gamma_1}{\gamma_2} \left(a_2^2 \gamma_2^2 - s^2 - \frac{a_1^2}{R^2} \right) \exp(x\gamma_2) \right\},$$

$$V = C_1 \gamma_1 \frac{k^2}{R^2} \{ \exp(x\gamma_1) - \exp(x\gamma_2) \},$$

$$\gamma_{1,2} = - \frac{1}{a_1 a_2 \sqrt{2}} \sqrt{A \mp \sqrt{A^2 - B}}, \quad (17)$$

$$A = a_2^2 s^2 + a_1^2 \left(s^2 + \frac{a_1^2}{R^2} \right) - \frac{k^4}{R}, \quad B = 4a_1^2 a_2^2 s^2 \left(s^2 + \frac{a_1^2}{R^2} \right);$$

$$W = W_0 \exp \left[- \frac{xs}{a} \sqrt{\frac{s^2 + \omega^2}{s^2 + \nu^2}} \right], \quad Q = \rho a \sqrt{\frac{s^2 + \nu^2}{s^2 + \omega^2}} W, \quad (18)$$

$$w_0 \div W_0 = sU(0, s); \quad \omega^2 = \frac{2\rho a^2}{\rho_1 h R} + \nu^2, \quad \nu^2 = \frac{c^2}{R^2};$$

$$V_1 = \frac{K}{N_1^2 - N_2^2} \{ \exp(-xN_2) - \exp(-xN_1) \}, \quad (19)$$

$$K = \frac{a}{a_2^2} \frac{\rho s U(0, s)}{\rho_1 h} \sqrt{\frac{s^2 + \nu^2}{s^2 + \omega^2}}, \quad N_1^2 = \frac{1}{a_2^2} (s^2 + \nu^2), \quad N_2 = \frac{s}{a} \sqrt{\frac{s^2 + \omega^2}{s^2 + \nu^2}}.$$

Величина C_1 в формулах (17) определяется из граничного условия (6), записанного в изображениях,

$$x = 0, \quad ms^2 u(0, s) = F + 2\pi R h \rho_1 a_1^2 \frac{du}{dx} - \pi R^2 \rho a \sqrt{\frac{s^2 + \nu^2}{s^2 + \omega^2}} sU(0, s). \quad (20)$$

Здесь F — изображение внешней силы f . В общем случае нахождение оригиналов изображений (17), (18), (19) является трудной задачей. По-видимому, для этой цели проще представить изображения в виде суммы функций, оригиналы которых известны, и сходящихся рядов по переменной s . Однако для малых значений t можно получить эффективное асимптотическое представление оригиналов. Нетрудно установить, что при $s \rightarrow \infty$ в грубом и более точном приближении имеют место следующие асимптотические представления *:

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \begin{cases} -s/a_1, \\ -\frac{1}{a_1} \sqrt{s^2 + \varepsilon_1^2} \approx -\frac{s}{a_1} \left(1 + \frac{n_1^2}{s^2}\right), \quad n_1^2 = \frac{\varepsilon_1^2}{2} = \frac{a_1^2}{R^2} \sigma^2 (1 - \sigma); \end{cases} \\ \gamma_2 &= \begin{cases} -s/a_2, \\ -\frac{1}{a_2} \sqrt{s^2 + \varepsilon_2^2} \approx -\frac{s}{a_2} \left(1 + \frac{n_2^2}{s^2}\right), \quad n_2^2 = \frac{\varepsilon_2^2}{2} = \frac{a_1^2}{2R^2} - n_1^2; \end{cases} \\ \frac{s}{a} \sqrt{\frac{s^2 + \omega^2}{s^2 + v^2}} &= \begin{cases} s/a, \\ \frac{s}{a} \left(1 + \frac{\kappa^2}{s^2}\right), \quad \kappa^2 = \frac{1}{2} (\omega^2 - v^2). \end{cases} \end{aligned} \quad (21)$$

Внешняя ударная сила f для малых значений t обычно представляется в простом виде. Так, например, при нормальном ударе оболочки с жестким дном с начальной скоростью v_0 о поверхность сжимаемой жидкости, плотность которой ρ_0 и скорость звука c_0 , в асимптотическом представлении имеем (2)

$$f = \pi R^2 \rho_0 c_0 \left\{ v_0 - \dot{u}(t) - \frac{c_0}{R} \left(v_0 t - \int_0^t \dot{u} d\tau \right) - \frac{c_0^2}{4R^2} \left(\frac{v_0 t^2}{2} - \int_0^t \dot{u}(\tau) (t - \tau) d\tau \right) \right\}, \quad (22)$$

$$\begin{aligned} F &= \pi R^2 \rho_0 c_0 v_0 \left[\frac{1}{s} - \frac{c_0}{R} \frac{1}{s^2} + \frac{c_0^2}{4R^2} \frac{1}{s^3} \right] - \\ &- \pi R^2 \rho_0 c_0 \left[sU(0, s) - \frac{cU}{R} + \frac{c_0^2}{4R^2} \frac{U(0, s)}{s} \right]. \end{aligned}$$

Поэтому для малых значений t , когда имеют место асимптотические представления (21), изображения U, V, V_1, W, Q определяются алгебраическими суммами функций вида

$$\Phi(s) \psi(s) \exp(\chi \gamma), \quad (23)$$

где $\Phi(s)$ — изображение известной функции, $\psi(s)$ — дробно-рациональная функция, у которой степень числителя меньше степени знаменателя. Величина γ в показателе экспоненты функции (23) принимает одно из асимптотических значений (21). Оригинал дробно-рациональной функции находится известным способом, если определены нули знаменателя. Так как рассматриваются большие значения s , его можно построить также путем разложения дробно-рациональной функции в ряд по степеням $1/s$ с последующим почленным переходом к оригиналу. Оригинал экспоненциальной функции в выражении (23) при указанных выше значениях γ известен (его можно найти из таблиц). Таким образом, оригинал (23), а следовательно, и оригиналы изображений (17), (18) и (19) в асимптотическом представлении определяются квадратурами.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
8 IV 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ А. Я. Сагомонян, Ю. А. Созоненко, Продольный удар по тонкостенному цилиндру с жестким дном. Вопросы механики, Сборн., в. 7, 1969, стр. 124.
² А. Я. Сагомонян, В. Б. Поручиков, Пространственные задачи неустановившегося движения сжимаемой жидкости, М., 1970.

* При осреднении, указанном в первой скобке, $n_1^2 \approx \frac{a_1^2}{R^2} \frac{\sigma}{2} (1 - 2\sigma^2)$.