Доклады Академии наук СССР
1972. Том 203, № 1

УДК 517.946 *МАТЕМАТИКА*

И. В. СКРЫПНИК

О РЕГУЛЯРНОСТИ ОБОБЩЕННЫХ РЕШЕНИЙ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ПРОИЗВОЛЬНОГО ПОРЯДКА

(Представлено академиком И. Н. Векуа 19 VII 1971)

Исследование разрешимости квазилинейных эллиптических уравнений высшего порядка впервые было проведено в работах М. И. Вишика ([1]) и продолжено затем в работах Ф. Браудера, Ж. Лере, Ж. Лионса, Ю. А. Дубинского и др. (см., например, обзор ([2])). При определенных предположениях доказано существование слабых решений для квазилинейных уравнений дивергентного вида.

О гладкости полученных обобщенных решений известно мало. Морри ([3]) доказал, что решение является гладким вне локально компактного множества меры нуль. При ряде существенных ограничений плоский случай рассмотрел Нечас ([4]) (помимо естественных условий предполагается включение оператора в некоторое параметрическое семейство, условие дефинитности его вариации и др.).

Известны примеры ([5-7]) регулярных вариационных задач, обобщенные решения которых не являются классическими, и показывающие, что уравнения высших порядков существенно отличаются по свойствам решений от уравнений второго порядка. В связи с этим возникает ряд вопросов для уравнений высшего порядка: определить минимальную гладкость обобщенного решения, обеспечивающую его классичность, выделить классы уравнений с регулярными решениями и др. Эти вопросы рассматриваются в настоящей работе.

1. Здесь строятся аналогичные указанным в ([5-7]) примеры регулярных вариационных задач с негладкими обобщенными решениями. Эти примеры показывают, что полученные ниже результаты являются точными.

Пусть $n > 2$, λ — произвольное число, удовлетворяющее неравенству $1 < \lambda < 2 - {}^1/_2 n$, $\varphi(t)$ — функция класса C^∞ на R^1 такая, что $\varphi(t) \equiv 1$ при $t > |\lambda|$, $\varphi(t) \equiv {}^1/_2|\lambda|$ при $t < {}^1/_2|\lambda|$.

Тогда функция $u(x) = |x|^\lambda$ является обобщенным решением в шаре $B = \{x \in R^n\colon |x| \leqslant 1\}$ уравнения Эйлера функционала

$$J(u) = \int\limits_B \left\{\left[\sum_{i,j=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j}\varphi^{-2}(|\nabla u|) + \sigma_1\delta_{ij}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\,\partial x_j}\right]^2 + \sigma_2 \sum_{i,j=1}^n \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\,\partial x_j}\right)^2\right\} dx,$$

где

$$\sigma_2 = \frac{[(n+\lambda-2)\sigma_1 + \lambda - 1]\cdot[n+\lambda-3+\sigma_1(\lambda-2)]}{(2-\lambda)(n+\lambda-2)}.$$

Выбирая σ_1 так, чтобы σ_2 было положительным, добьемся эллиптичности уравнения Эйлера функционала $J(u)$.

Сделаем несколько замечаний.

1) При λ, близком к единице, получаем пример негладкого решения регулярной вариационной задачи в случае $n \geqslant 3$.

2) При λ, близком к единице, произвольном q, $1 < q < 2$, и достаточно большом n, получаем пример решения регулярной задачи, принадле-

жащего $B_q^{2+1/2n}$, но не являющегося регулярным. Определение пространств $B_p{}^r$ см., например, в ([8]).

3) При λ, близком к нулю и отрицательном, имеем пример неограниченного решения при $n \geqslant 5$.

2. Сейчас будут указаны условия регулярности обобщенного решения уравнения

$$\sum_{|\alpha|\leqslant m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha A_\alpha(x, u, \ldots, D^m u) = 0. \tag{1}$$

Здесь $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, α_i целые, $D^\alpha u = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \ldots \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n} u$, $D^j u = \{D^\alpha u$: $|\alpha| = j\}$, $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \Omega \subset R^n$.

Еще С. Н. Бернштейном (при $m = 1$) были выяснены условия, которые следует считать естественными при изучении регулярности решений. Это условие эллиптичности, которое для уравнения (1) будем писать в виде

$$\sum_{|\alpha|=|\beta|=m} A_{\alpha\beta}(x, \xi)\, \eta_\alpha \eta_\beta \geqslant C_1 (1 + |\xi|)^{p-2} \sum_{|\alpha|=m} \eta_\alpha^2, \quad C_1 > 0; \tag{2}$$

здесь $A_{\alpha\beta}(x, \xi) = \partial A_\alpha(x, \xi) / \partial \xi_\beta$, $p \geqslant 2$, $\xi = \{\xi_\alpha$: $|\alpha| \leqslant m\} \in R^M$. Естественными являются гладкость $A_\alpha(x, \xi)$ и оценки на рост функций $A_\alpha(x, \xi)$ и их производных. Предполагаем, что функции A_α дифференцируемы по своим аргументам $[{}^1\!/\!_2 n] + 1$ раз и имеют место оценки с положительной постоянной C_2 при $x \in \bar{\Omega}$ и $\xi \in R^M$, $|\alpha| \leqslant m$, $|\beta| + |\gamma| \leqslant \leqslant [{}^1\!/\!_2 n] + 1$:

$$|D_x^\beta D_\xi^\gamma A_\alpha(x, \xi)| (1 + |\xi^\gamma|) \leqslant C_2 (1 + |\xi|)^{p-1}, \tag{3}$$

где $\gamma = \{\gamma_\alpha$: $|\alpha| \leqslant m\}$, $D_\xi^\gamma = \prod_{|\alpha|\leqslant m} (\partial/\partial\xi_\alpha)^{\gamma_\alpha}$, $\xi^\gamma = \prod_{|\alpha|\leqslant m} \xi_\alpha^{\gamma_\alpha}$.

Функция $u \in W_p{}^m(\Omega)$ называется обобщенным решением уравнения (1), если для произвольной $v \in \mathring{W}_p{}^m(\Omega)$ выполнено равенство

$$\int_\Omega \sum_{|\alpha|\leqslant m} A_\alpha(x, u, \ldots, D^m u)\, D^\alpha v \, dx = 0.$$

Пусть Ω' — произвольная строго внутренняя подобласть области Ω, $\xi(x) \in C_0{}^\infty(\Omega)$ и при $x \in \Omega'$ $\xi(x) \equiv 1$.

Теорема 1. *Предположим, что выполнены условия* (2), (3) *и* $u(x)$ — *такое обобщенное решение уравнения* (1), *что при* $|\alpha| = |\beta| = m$

$$(1 + |D^\alpha u|)^{p-2} D^\beta u \cdot \xi \in B_2^{n/2}(\Omega). \tag{4}$$

Тогда $u(x) \in C^m(\Omega')$.

Дальнейшее повышение гладкости $u(x)$ следует из результатов ([9]). Отметим, что, как показывает замечание 2), в условии (4) нельзя заменить $B_2^{1/2n}$ на $B_q^{1/2n}$ при $q < 2$.

3. Установим сейчас регулярность обобщенных решений в плоском случае ($n = 2$) при выполнении только естественных условий.

Теорема 2. *Пусть* $n = 2$, *выполнены условия* (2), (3) *предыдущего пункта и* $u(x) \in \mathring{W}_p{}^m(\Omega)$ — *обобщенное решение уравнения* (1).

Тогда $u(x) \in C^m(\Omega')$ *для произвольной строго внутренней подобласти* Ω' *области* Ω.

Регулярность решения вблизи границы дает

Теорема 3. *Пусть* $n=2$, $\partial\Omega \in C^{m,\delta}$, $\delta > 0$, *выполнены условия* (2), (3) *и п.* 2 *и при* x, *принадлежащем некоторой окрестности* $\partial\Omega$,

$$A_{\alpha\beta}(x, \xi) = A_{\beta\alpha}(x, \xi), \quad |\alpha|=|\beta|=m.$$

Тогда всякое обобщенное решение $u(x)$ *уравнения* (1) *принадлежит* $C^{m,\lambda}(\overline{\Omega})$ *с некоторым* $\lambda > 0$.

4. Рассмотрим теперь вопрос о регулярности обобщенных решений уравнения

$$\sum_{|\alpha|,\,|\beta|\leqslant m} (-1)^{|\alpha|} D^{\alpha}\{a_{\alpha\beta}(x, u, \ldots, D^k u) D^{\beta} u\} = 0 \tag{5}$$

при $k < m$. Предполагаем, что $\partial\Omega \in C^m$, $a_{\alpha\beta}(x, \xi')$ — непрерывные функции $(x, \xi') \in \overline{\Omega} \times R^N$, $\xi' = \{\xi_\alpha\colon\ |\alpha| \leqslant k\} \in R^N$ и имеют место оценки с положительными k_1, k_2:

$$\sum_{|\alpha|=|\beta|=m} a_{\alpha\beta}(x, \xi')\, \eta_\alpha \eta_\beta \geqslant k_1 \sum_{|\alpha|=m} \eta_\alpha^2, \tag{6}$$

$$|a_{\alpha\beta}(x, \xi')| \leqslant k_2, \quad |\alpha|, |\beta| \leqslant m. \tag{7}$$

Регулярность решений уравнения (5) дает

Теорема 4. *Пусть выполнены условия* (6), (7) *и* $u(x) \in \overset{\circ}{W}{}_2^m(\Omega)$ — *обобщенное решение уравнения* (5).

Тогда при $n = 2(m-k)$ $u(x) \in C^m(\overline{\Omega})$.

Замечание 1) п. 1 показывает, что при $n < 2(m-k)$ утверждение теоремы не имеет места.

5. Укажем в заключение условия непрерывности обобщенного решения. Рассматриваем решение уравнения (1), предполагая выполненными неравенства с $C_1, C_2 > 0$:

$$\sum_{|\alpha|=m} A_\alpha(x, \xi)\, \xi_\alpha \geqslant C_1 \sum_{|\alpha|=m} |\xi_\alpha|^p - C_2, \tag{8}$$

$$|A_\alpha(x, \xi)| \leqslant C_2(1 + |\xi|)^{p-1}, \quad |\alpha| \leqslant m. \tag{9}$$

Предполагается, что гладкость $\partial\Omega$ обеспечивает применение теорем вложения для $W_p^m(\Omega)$.

Теорема 5. *Если функции* $A_\alpha(x, \xi)$ *измеримы и удовлетворяют неравенствам* (8), (9), $u(x) \in \overset{\circ}{W}{}_p^m(\Omega)$ — *обобщенное решение уравнения* (1) *и* $n = mp$, *то* $u \in C(\overline{\Omega})$.

Замечание 3) п. 1 показывает, что утверждение теоремы не имеет места при $n > mp$.

Отметим, что ограниченность $u(x)$ в условиях теоремы 5 доказана в ([10]). При $mp > n$ утверждение теоремы 5 следует из теорем вложения.

Институт прикладной математики и механики
Академии наук УССР
Донецк

Поступило
6 VII 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] М. И. Вишик, Тр. Московск. матем. общ., **12**, 125 (1963). [2] Ю. А. Дубинский, УМН, **23**, № 1, 45 (1968). [3] Ч. Б. Морри, Сборн. пер. Математика, **13**, 3, 50 (1969). [4] I. Nečas, Comm. Math. Univ. Carol., **9**, 3, 365 (1968). [5] E. De Giorgi, Boll. Un. Matem. Ital., Ser. 4, № 1, 135 (1968). [6] E. Giusti, M. Miranda, Boll. Un. Matem. Ital., Ser. 4, № 2, 219 (1968). [7] В. Г. Мазья, Функ. анализ, **2**, в. 3, 53 (1968). [8] С. М. Никольский, Приближение функций многих переменных и теоремы вложения, М., 1969. [9] С. Агмон, А. Дуглис, Л. Ниренберг, Оценки решений эллиптических уравнений вблизи границы, М., 1962. [10] I. Frehse, Boll. Unione Mat. Haliana, **3**, № 4, 607 (1970).