Доклады Академии наук СССР
1971. Том 201, № 3

УДК 517.946 МАТЕМАТИКА

В. Л. РОЙТБУРД

О ПРЕДСТАВЛЕНИИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ В ВИДЕ КОНТИНУАЛЬНОГО ИНТЕГРАЛА

(Представлено академиком И. Г. Петровским 6 V 1971)

В данной работе получено представление решения задачи Коши для уравнения

$$\partial u / \partial t + \hat{H} u = 0 \tag{1}$$

в виде предела конечнократных интегралов, когда кратность стремится к бесконечности. Оператор $\hat{H}$ — псевдодифференциальный оператор из некоторого класса *. Впервые такого рода представление было получено Р. Фейнманом [1] (для уравнения Шредингера), однако без математического обоснования. В работе М. А. Евграфова [2] было проведено такое обоснование для случая, когда $\hat{H}$ — дифференциальный оператор с некоторыми естественными ограничениями на коэффициенты.

1. Следуя работе [3], введем класс G_ρ^m таких $p(y) \in C^\infty(\mathbf{R}^{2k})$, что для всех мультииндексов γ выполнены оценки

$$|\partial^{|\gamma|} p(y) / \partial^\gamma y| \leqslant C_\gamma (1 + |y|)^{m - \rho|\gamma|}, \tag{2}$$

m и ρ вещественные.

Обозначим через $\hat{L}$ оператор гармонического осциллятора $(\hat{L} f)(x) = x^2 f(x) - (\Delta f)(x)$, где $x^2 = x_1^2 + \ldots + x_k^2$, Δ — оператор Лапласа. С $\hat{L}$ можно связать шкалу гильбертовых пространств: $\tilde{H}_s(\mathbf{R}^k)$ есть пополнение $C_0^\infty(\mathbf{R}^k)$ по норме $\|f\|_s^2 = \int (1 + \hat{L})^s f \bar{f}\, dx$. Очевидно, $\tilde{H}_0(\mathbf{R}^k) = L_2(\mathbf{R}^k)$.

Из теоремы Хёрмандера о непрерывности в L_2-норме [4] и формулы композиции из [3] легко получить

Предложение 1. *Если $p(x, \xi) \in G_\rho^m$, то для любого вещественного s $p(x, D)$ есть ограниченный оператор из $\tilde{H}_{s+m}(\mathbf{R}^k)$ в $\tilde{H}_s(\mathbf{R}^k)$.*

Замечание. В этом пункте под $\hat{p}(x, D)$ можно понимать как обычный оператор

$$\hat{p}(x, D) u = (2\pi)^{-k} \int p(x, \xi) e^{i\langle x - y, \xi\rangle} u(y)\, dy\, d\xi,$$

так и оператор

$$\hat{p}(x, D) u = (2\pi)^{-k} \int p\left(\frac{x + y}{2}, \xi\right) e^{i\langle x - y, \xi\rangle} u(y)\, dy\, d\xi,$$

отвечающий симметричному символу Вейля $p(x, \xi)$ (см. [5,6]).

Сформулируем теперь нужную нам теорему существования. Положим $v(x, \xi; t) = \exp\{-tH(x, \xi)\}$, $\hat{v}(t) = v(x, D; t)$.

Теорема 1. *Пусть $\hat{H} = \hat{H}(x, D)$, где $H(x, \xi) \in G_\rho^m$ и выполнены условия*

$$|\partial_y^\gamma H(y) / H(y)| \leqslant C_\gamma (1 + |y|)^{-\rho|\gamma|}; \tag{3}$$

$$\operatorname{Re} H(y) > 0, \qquad |\operatorname{Im} H(y) / \operatorname{Re} H(y)| \leqslant \text{const}; \tag{4}$$

---

* Мы снабжаем операторы знаком ^, как это принято в физике.

тогда для любых $s \in \mathbf{R}$ *и* $f \in \tilde{H}_s$ *существует решение задачи Коши для уравнения* (1) $u(x, t) = \hat{U}(t) f$, *причем*

$$\hat{U}(t) = \hat{v}(t) + t^2 \hat{a}(t); \tag{5}$$

$$\|a(t) f\|_{s-2(m-\rho)} \leqslant C \|f\|_s, \text{ когда } 0 < t \leqslant T. \tag{6}$$

Заметим, что условие (3) — очевидный аналог гипоэллиптичности по Хёрмандеру [4], условие (4) выполнено для положительного оператора с гипоэллиптичным символом (быть может, после прибавления к оператору константы).

Доказательство теоремы получается из равномерных по t оценок членов асимптотического разложения для символа оператора $U(t)$ и из предложения 1.

С помощью принципа Хольмгрена [7] можно доказать единственность решения задачи Коши в классах $\tilde{H}_s$, из чего следует, что операторы $\hat{U}(t)$ образуют полугруппу при $t > 0$.

2. Изложенные результаты позволяют доказать следующее

Предложение 2. *Пусть* $H(y)$ *удовлетворяет условиям теоремы* 1 *и* $m < \rho$, *тогда* $\lim\limits_{n} \hat{v}(t/n)^n = \hat{U}(t)$ *(предел по норме).*

Утверждение следует из оценки

$$\left\|\hat{v}\left(\frac{t}{n}\right)^n - \hat{U}(t)\right\| = \left\|\hat{v}\left(\frac{t}{n}\right)^n - \hat{U}\left(\frac{t}{n}\right)^n\right\| \leqslant \left(\frac{t}{n}\right)^2 nua +$$

$$+ \frac{n(n-1)}{2!}\left(\frac{t^2}{n^2}\right)^2 (ua)^2 + \cdots = \left(1 + \frac{t^2}{n^2} ua\right)^n - 1 = O\left(\frac{1}{n}\right),$$

где $a = \sup \|\hat{a}(t)\|$, $u = \max\{1, \sup \|\hat{U}(t)\|\}$, $0 < t \leqslant T$.

Используя тождество $a^{n+1} - b^{n+1} = \sum\limits_{k=0}^{n} a^k (a-b) b^{n-k}$, можно доказать следующий простой, но важный для наших целей факт.

Предложение 3. *Пусть* $\hat{U}(t) = \hat{b}(t) + t^2 \hat{a}(t)$, *причем* $\|\hat{b}(t)\| \leqslant 1$, $\hat{a}(t)$ *удовлетворяет оценке* (6), *тогда* $\lim \hat{b}(t/n)^n = \hat{U}(t)$, *сходимость понимается по норме отображений* $\tilde{H}_{s+\sigma} \to \tilde{H}_s$, *где* $\sigma \geqslant 4(m-\rho)$.

Следствие. *Пусть* $H(x, \xi) = P(x) + Q(\xi)$ *удовлетворяет условиям теоремы* 1, *тогда* $\lim \hat{v}(t/n)^n = \hat{U}(t)$. *Здесь* $\hat{v}(\tau)$ — *оператор с обычным символом* $e^{-\tau H}$. *Легко усмотреть, что* $\|\hat{v}(\tau)\| \leqslant 1$.

Все утверждения настоящего пункта можно понимать как утверждения о сходимости конечнократных интегралов, когда кратность стремится к бесконечности. Следует только в допредельном выражении воспользоваться формулой действия псевдодифференциального оператора на вектор. При этом получаются такие же интегралы, как в [2], однако, поскольку речь идет не о фундаментальном решении, а о решении задачи Коши, предельному выражению нельзя придать такого красивого вида, как у М. А. Евграфова.

3. В этом пункте нам удобно реализовать гильбертово пространство как пространство антианалитических функций от k комплексных * переменных $(z_1, \ldots, z_k) = z$ с нормой $\|\Phi\|^2 = \int |\Phi(\bar{z})|^2 e^{-\langle z, z\rangle} dz\, d\bar{z}$, мера $dz\, d\bar{z} = dz_1\, d\bar{z}_1 \ldots dz_k d\bar{z}_k$ нормирована так, что $\|1\|^2 = 1$.

Будем говорить, что $p_1(\bar{z}, z)$ — нормальная форма (или символ Вика) оператора $\hat{p}_1$, если $(\hat{p}_1\Phi)(\bar{z}) = \int p_1(\bar{z}, v) e^{-\langle v, v-z\rangle} dv\, d\bar{v} \Phi(\bar{v})$. Аналогично назовем $p_0(z, \bar{z})$ антививиковским символом** оператора $\hat{p}_0$, если $(\hat{p}_0\Phi)(\bar{z}) = \int p_0(\bar{v}, v) e^{-\langle v, v-z\rangle} dv\, d\bar{v}\, \Phi(\bar{v})$. Мы не останавли-

* Все результаты этого пункта могут быть сформулированы и для символов от вещественных переменных, но формулы в этом случае более громоздкие.

** Антививиковские символы далее снабжены индексом 0.

ваемся на том, когда приведенные формальные выражения действительно определяют операторы.

Понятие нормальной формы достаточно хорошо известно (например, см. ([6])), исследование же антивиковских символов начато только недавно ([8]). Нам понадобятся следующие простые свойства антивиковских символов (см. ([8])):

а) если $|p_0(\bar{z}, z)| \leqslant 1$, то и норма оператора $\|\hat{p}_0\| \leqslant 1$;

б) оператор $\hat{p}_0$ обладает символом Вика p_1 и символом Вейля p, причем они равны решению задачи Коши для уравнения теплопроводности с начальной функцией p_0 в моменты времени 1 и $^1/_2$ соответственно: $p(\bar{z}, z) = (2\pi)^{-k/2}\int e^{-\langle (z-u), (\bar{z}-\bar{u})\rangle} p_0(\bar{u}, u)\,du\,d\bar{u}$, аналогичная формула и для p_1.

Введем обозначения $x = \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{Re} z$, $\xi = \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{Im} z$, сохраним то же обозначение p_0 для функции $p_0(x, \xi) = p_0(\bar{z}, z)$.

Теорема 2. *Пусть оператор* $\hat{H}$ *обладает антивиковским символом* H_0, *причем* 1) $H_0 > 0$, 2) $H_0 \in G_\rho^m$ *и* 3) *оценка* (3) *выполнена как для* $H_0(y)$, *так и для вейлевского символа* $H(y)$, *тогда* $\lim\limits_{n\to\infty} \hat{v}_0(t/n)^n = \hat{U}(t)$. *Сходимость такая же, как и в предложении* 3.

Доказательство теоремы следует из предложения 3 и оценки разности операторов с антивиковским символом $e^{-\tau H_0}$ и символом Вейля $e^{-\tau H}$.

Требование 3) теоремы, по-видимому, может быть ослаблено.

В качестве примера символа, удовлетворяющего условиям теоремы, укажем класс символов со старшим членом — эллиптическим полиномом, т. е. $H_0(y) = P(y) + s(y)$, где $P(y)$ — однородный полином степени m, обращающийся в 0 только тогда, когда $y = 0$, $s(y) \in G_\rho^{m-\varepsilon}$.

Напомним теперь (см. ([6])), что нормальная форма p_1 оператора $\hat{p}_1$ равна $p_1(\bar{a}, a) = (\hat{p}_1\Phi_a, \Phi_a)$, где $\Phi_a(\bar{z}) = e^{a\bar{z} - \frac{1}{2}\bar{a}a}$. Легко проверить, что $\Phi_a \in \bar{H}_s$ при любом s. Поэтому из теоремы 2 вытекает

Следствие. *В условиях теоремы* 2

$$u_1(\bar{a}, a; t) = \lim_{n\to\infty}\int \exp\left\{-\frac{t}{n}\sum_{k=1}^{n} H_0(\bar{z}_k, z_k) - \right.$$

$$\left. - \sum_{k=0}^{n} \bar{z}_k(z_k - z_{k+1})\right\} dz_n\,d\bar{z}_n \ldots dz_1\,d\bar{z}_1 =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\int_0^t H_0(\bar{z}(s), z(s))\,ds + \int_0^t \frac{dz(s)}{ds}\bar{z}(s)\,ds\right\}\prod dz(s)\,d\bar{z}(s),$$

$$[z(0) = z(t) = a],$$

где $u_1(\bar{a}, a; t)$ — *нормальная форма оператора* $\hat{U}(t) = e^{-t\hat{H}}$. *Сходимость поточечная.*

Теперь не представляет труда получить выражение для фундаментального решения $E(b, a; t)$. Оно отличается от приведенного выше континуального интеграла только множителем $e^{-\bar{a}a}$ и граничными условиями $z(0) = b$, $z(t) = a$.

Автор выражает признательность Ф. А. Березину за постановку задачи и полезные обсуждения и М. А. Шубину за ценные советы.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
29 IV 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] R. P. Feynmann, Phys. Rev., 84, 108 (1951). [2] М. А. Евграфов, ДАН, 191, № 5, 979 (1970). [3] М. А. Шубин, ДАН, 196, № 2, 316 (1971). [4] Л. Хёрмандер, В сборн. Псевдодифференциальные операторы, М., 1967, стр. 297. [5] H. Weyl, Zs. Phys., 46, 1 (1927). [6] Ф. А. Березин, Тр. Московск. матем. общ., 17, 117 (1967). [7] И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов, Обобщенные функции, в. 3, М., 1958. [8] Ф. А. Березин, Матем. сборн., 86 (128), № 4 (1971).