

В. М. ЧЕРЕСИЗ

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПОЧТИ-ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 19 VII 1971)

В работе ⁽³⁾ рассматривался вопрос о соотношении понятий равномерной устойчивости по Ляпунову и равномерной асимптотической устойчивости для ограниченных решений периодических систем. Здесь изучается аналогичный вопрос для почти-периодических систем и полученные соотношения между двумя типами устойчивости используются для формулировки теорем о почти-периодичности ограниченных решений в терминах устойчивости по Ляпунову.

Пусть система дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = F(x, t) \quad (1)$$

с непрерывной вектор-функцией $F(x, t)$, определенной в цилиндре $C_G = G \times I$, $G \subset R^n$, $I = (-\infty, +\infty)$, удовлетворяет обычным требованиям почти-периодичности по t равномерно в каждом компакте по x ⁽¹⁾. Будем говорить, что некоторая точка $x^* \in G$ притягивает из своей Δ -окрестности, если шар $\|x_0 - x^*\| \leq \Delta$ лежит в области притяжения решения $x(t, x^*, 0)$ при $t = 0$. Если каждая точка x^* некоторого множества Ω притягивает при $t = 0$ из своей Δ -окрестности с общим для всех $x^* \in \Omega$ радиусом $\Delta > 0$, то будем говорить, что Δ -окрестность множества Ω лежит при $t = 0$ в области его притяжения.

Будем считать в дальнейшем, что решение $\Phi(t)$ погружено в ограниченную область G , $\bar{G} \subset G$, вместе со своим замыканием.

Лемма. Если ограниченное (при $t \geq 0$) решение $\Phi(t)$ почти-периодической системы (1) равномерно устойчиво по Ляпунову и если некоторая Δ -окрестность множества Ω — его ω -предельных точек лежит в области притяжения этого множества при $t = 0$, то $\Phi(t)$ равномерно асимптотически устойчиво.

Заметим, что в условиях леммы решение $\Phi(t)$ заранее не предполагается даже просто притягивающим хотя бы при $t = 0$, а утверждается существование некоторой $\delta_{[0, \infty)}$ -трубки решения $\Phi(t)$ постоянного радиуса $\delta > 0$, притяжение из которой равномерно.

Если решение $\Phi(t)$, $t \in (-\infty, \infty)$, устойчиво по Ляпунову равномерно относительно $t_0 \in (-\infty, \infty)$, то имеет место равномерное притяжение из $\delta(\Delta)_{(-\infty, \infty)}$ -трубки. Нужно дополнительно к условиям леммы потребовать, чтобы Δ -окрестность множества α -предельных точек также лежала в области притяжения этого множества при $t = 0$.

Заметим, что выполнение локальной теоремы единственности для системы (1) в условиях леммы не предполагается.

Теорема 1. Если ограниченное, равномерно устойчивое по Ляпунову решение $\Phi(t)$, $t \geq 0$, системы (1) погружено в цилиндр C_G вместе со своим замыканием и притягивает из G при $t = 0$, то оно равномерно асимптотически устойчиво.

Из условия теоремы следует, что существует область G_0 , $\bar{G}_0 \subset G$, содержащая $\Phi(t)$, $t \geq 0$, вместе с замыканием. Пусть $d = \rho(\bar{G}_0, \partial G) > 0$ — расстояние от замыкания G_0 до границы G . Тогда каждая ω -предельная

точка x_0 решения $\Phi(t)$ содержится в Γ вместе со своей d -окрестностью. По условию теоремы все решения с начальными данными при $t = 0$, лежащими в этой d -окрестности (в том числе и $x(t, x_0, 0)$) притягиваются к $\Phi(t)$ при $t \rightarrow +\infty$. Значит, точка x_0 притягивает из своей d -окрестности. Так как d — общее для всех ω -предельных точек решения $\Phi(t)$, то остается применить лемму.

Если $\Phi(t)$, $t \in (-\infty, \infty)$, устойчиво по Ляпунову равномерно относительно $t_0 \in (-\infty, \infty)$, то, очевидно, точно такое же рассуждение годится и для α -предельной точки x_α и поэтому притяжение окажется равномерным из $\delta(\Delta)_{(-\infty, \infty)}$ -трубки.

В следующей теореме содержится утверждение, в некотором смысле обратное к утверждению теоремы 1. Предполагается, что система (1) и каждая система $F^*(x, t)$ класса $H\{F(x, t)\}$ ⁽¹⁾ удовлетворяет локальной теореме единственности.

Теорема 2. Если ограниченное решение $\Phi(t)$ системы (1) равномерно асимптотически устойчиво, то оно равномерно устойчиво по Ляпунову.

Если ограниченное решение $\Phi(t)$, $t \in (-\infty, \infty)$, притягивает равномерно из $\Delta_{(-\infty, \infty)}$ -трубки, то устойчивость по Ляпунову, очевидно, окажется равномерной относительно $t_0 \in (-\infty, \infty)$.

Если $\Phi(t)$ — почти-периодическое решение, то теоремы 1 и 2 дают критерии равномерной асимптотической устойчивости.

Теорема 3. Для того чтобы почти-периодическое, асимптотически устойчивое решение $\Phi(t)$ системы (1) было равномерно асимптотически устойчивым, необходимо и достаточно, чтобы оно было равномерно устойчивым по Ляпунову.

Необходимость утверждается в теореме 2 даже для любых ограниченных решений.

Теорема 1 дает возможность заменить требование равномерной асимптотической устойчивости требованием равномерной устойчивости по Ляпунову в некоторых теоремах о почти-периодичности ограниченных решений. В следующих теоремах все системы класса $H\{F, (x, t)\}$ удовлетворяют локальной теореме единственности. Заметим, что если $\Phi(t)$, $t \geq 0$, — ограниченное решение системы (1), равномерно устойчивое по Ляпунову или равномерно асимптотически устойчивое, то имеется также ограниченное решение $\Phi^*(t)$, $t \in (-\infty, \infty)$, обладающее такими же свойствами, но равномерно на всей оси $(-\infty, \infty)$. Достаточно взять $\Phi^*(0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \Phi(\tau(\frac{1}{n}))$, где $\tau(\frac{1}{n})$ — уточняющаяся последовательность положительных $\frac{1}{n}$ -почти-периодов для $F(x, t)$. Поэтому дальше мы будем иметь дело именно с этим решением.

Теорема 4. Если Γ лежит в области притяжения при $t = 0$ равномерно асимптотически устойчивого ограниченного решения $\Phi(t)$, $t \in (-\infty, \infty)$, то последнее является почти-периодическим с модулем показателей Фурье, содержащимся в модуле правой части системы (1).

Эта теорема следует из теоремы 3 работы ⁽²⁾.

Теперь, используя теорему 1, получаем следующее утверждение.

Теорема 5. Если равномерно устойчивое по Ляпунову, ограниченное решение $\Phi(t)$ притягивает из Γ при $t = 0$, то оно является почти-периодическим, удовлетворяющим включению модулей.

Действительно, теорема 1 гарантирует равномерное притяжение из некоторой δ -трубки, а тогда теорема 4 гарантирует почти-периодичность.

Наконец, теорема 5 дает возможность определить системы с конвергенцией более слабыми требованиями, чем обычно (без предположения равномерного притяжения даже из узкой трубки ⁽³⁾), и все же гарантировать при этом почти-периодичность предельного решения.

Системой с конвергенцией назовем систему (1), имеющую

равномерно устойчивое по Ляпунову, ограниченное решение $\Phi(t)$, $t \in (-\infty, \infty)$ (предельное решение), асимптотически устойчивое в целом. Здесь мы нигде не требуем равномерного притяжения.

Теорема 6. *Предельное решение $\Phi(t)$ системы с конвергенцией является почти-периодическим, удовлетворяющим включению модулей.*

Институт математики
Сибирского отделения Академии наук СССР
Новосибирск

Поступило
9 VII 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ Б. П. Демидович, Лекции по математической теории устойчивости, «Наука», 1967. ² В. М. Чересиз, ДАН, **173**, № 2 (1967). ³ В. М. Чересиз, ДАН, **196**, № 3 (1971).