

А. Б. ВИСТЕЛИУС, А. В. ФААС

О СТАТИСТИЧЕСКОЙ ИДЕНТИФИКАЦИИ ИДЕАЛЬНОГО МАГМАТИЧЕСКОГО ГРАНИТА

(Представлено академиком Д. С. Коржинским 4 III 1971)

1. Идеальным магматическим гранитом мы будем называть породу, возникшую при постоянном давлении по схеме эксперимента Татла — Боуена ⁽⁹⁾, при отсутствии взаимных смещений, образующихся при кристаллизации индивидов.

Согласно [4], последовательность индивидов a кварца (Q), калиевого полевого шпата (Or) и плагиоклаза (Ab) на прямой, проходящей через идеальный гранит, обладает следующими свойствами.

Последовательность индивидов a_I , $I \in \{Q, Or, Ab\}$, статистически неотличима от эргодической, однородной, обратимой, простой по отношению к конечному прошлому марковской последовательности, т. е. последовательности со свойством

$$P(a_I^{(k)}/a_J^{(k-1)}, a_R^{(k-2)}, \dots, a_S^{(k-l)}) = P(a_I^{(k)}/a_J^{(k-1)}) \neq P(a_I) \quad (1)$$

для любых конечных k и l и любых наборов $I, \dots, S$,

$$P(a_I/a_J) = c_{J,I}P(a_I), \quad (2)$$

$c_{IJ} = c_{JI} > 0$ при $I \neq J$; $0 < c_{II} < 1$ при $I \neq E$; $0 \leq c_{II} \leq c_{JJ}$ при $I = E$ для E -минерала, встречающегося только в тройной эвтектике.

2. Решается задача: имеются два класса $\mathcal{S}$ — идеальных гранитов и $\mathcal{M}$ — всех остальных гранитов ($\mathcal{S} \cap \mathcal{M} = \emptyset$). Берется образец из реальной интрузии с геологическими признаками ее магматического происхождения. Необходимо указанный образец отнести к одному из отмеченных классов. Задача решается по последовательности замеренных под микроскопом зерен с общим числом их около тысячи.

Используется терминология: последовательность со свойством $P(a_I/a_J, \dots) = P(a_I)$ называется бернулиевской или марковской нулевого порядка; если $P(a_I/a_J, a_H, \dots, a_S) = P(a_I/a_J) \neq P(a_I)$, то последовательность называется простой марковской или марковской первого порядка. Соответственно при наличии свойства $P(a_I/a_J, a_H, \dots, a_S) = P(a_I/a_J a_H) \neq P(a_I/a_J)$ последовательность называется марковской второго порядка. При этом предполагается, что приведенные равенства справедливы для любых фиксированных индексов.

3. Для идентификации породы в шлифе на расстоянии в 4 — 5 диаметров зерен и без общего зерна для двух сечений делаются параллельные пересечения в одном и том же направлении. 10 и более зерен кварца, калиевого полевого шпата и плагиоклаза, вплотную следующие одно за другим в одном сечении, называются подпоследовательностями. Из подпоследовательностей, имеющих одно и то же направление фиксации зерен, строится исследуемая последовательность.

4. Определение класса породы начинается с проверки гипотезы о порядке марковости в исследуемой последовательности, в предположении, что она обладает однородностью и эргодическим свойством. Для решения задачи строятся альтернативные гипотезы $H_0 : H_1$ и $H_1 : H_2$, где индекс означает

порядок марковости исследуемой последовательности. Если тест решает обе альтернативы в пользу H_1 , то продолжаем проверку, если одна из альтернатив решена не в пользу H_1 , образец относится к классу $\mathcal{M}$. Выбор альтернативы производится по значению статистики Λ ^(6, 7) с числом степеней свободы $\nu = N^{(n-1)}(N-1)^2$, где N — число состояний и n — порядок марковости в H_{i+1} при проверке гипотезы H_i против H_{i+1} .

Получив решение альтернативы в пользу H_1 , возвращаемся к проверке однородности. Для этого строим матрицы переходных вероятностей для подпоследовательностей и сравниваем каждую из них с матрицей переходных вероятностей исследуемой последовательности. Проверка однородности проводится с помощью χ^2 при числе степеней свободы $\nu = N^n(N-1) \cdot (m-1)$, где m — число подпоследовательностей, из которых построена исследуемая последовательность. Оценку однородности следовало бы теоретически вести с помощью критерия отношения правдоподобия, но из вычислительных соображений предпочтительнее χ^2 .

Установив по отсутствию нулевых элементов в исходной матрице или у ее степеней наличие эргодического свойства у исходной последовательности, переходим к проверке ее обратимости и особенностей (2) и (3) у ее матрицы переходных вероятностей. Для этого проверяем по χ^2 согласие матрицы P_{JI} , рассчитанной по методу наименьших квадратов в предположении, что $c_{IJ} = e_{IJ}$ и вектор наблюдаемых частот совпадает с вектором априорных вероятностей, с наблюдаемой матрицей $\tilde{P}_{JI}$.

Коэффициенты c_{JI} вычисляются так, чтобы получить минимум χ^2 при наличии шести линейных ограничений, из которых три связаны с равенством сумм по строкам единице и три с симметрией матрицы. Как известно ⁽¹⁾, стр. 107), для этого необходимо решить линейную систему

$$Ac = b,$$

$$A = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 & p_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_1 & p_2 & p_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_1 & p_2 & p_3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} c_{11} \\ c_{12} \\ c_{13} \\ c_{21} \\ c_{23} \\ c_{31} \\ c_{32} \\ c_{33} \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

где $P(a_i) = p_i$ для сокращения.

Получив решение c , составляем по нему модифицированное значение χ^2 ⁽²⁾, стр. 236):

$$\chi_x^2 = \sum_{I, J} \frac{\tilde{n}_I (\tilde{P}_{IJ} - c_{IJ} P_J)^2}{\tilde{P}_{IJ}},$$

где $\tilde{P}_{IJ} = \tilde{P}(a_J / a_I)$ для сокращения. Число степеней свободы равно трем. Если $c_{JI} > 0$ и χ^2 достаточно мало для принятия гипотезы о совпадении $\tilde{P}_{IJ}$ и P_{IJ} , то продолжаем исследование.

Для проверки (3) заметим, что неравенство $0 < c_{II} < 1$ эквивалентно $P(a_I / a_I) < P(a_I)$.

Рассматривая $P(a_i)$ и $P(a_i / a_i)$ как параметры соответствующих биномиальных распределений, находим по данным наблюдений нижнюю a_1 и верхнюю a_2 границы 95% доверительных интервалов. Для этого пользуемся эмпирическими формулами, дающими точность подсчета порядка 0,01:

$$a_1 = \frac{x(0,05; 2m)}{1/2x(0,05; 2m) + 2N - m + 1}, \quad a_2 = \frac{x(0,95; 2m + 2)}{1/2x(0,95; 2m + 2) + 2N - m}, \quad (*)$$

где x — соответственно 5%- и 95%-квантили центрального распределения χ^2 с $2m$ и $2m + 2$ степенями свободы ⁽³⁾, стр. 49), m — числитель и N — знаменатель соответствующих частот.

Итак, если статистически подтверждено, что исследуемая последовательность обладает марковским свойством первого порядка, однородностью, эргодичностью, имеет структуру матрицы переходных вероятностей вида (2), удовлетворяющей четырем неравенствам (3), то образец исследуемой породы следует отнести к классу $\mathcal{S}$. На это требуется около 15 мин. машинного времени в расчете на БЭСМ-3.

5. Архейский массив Шинбун⁽⁸⁾, Индия, Орисса, окрестности дер. Бхауни у сел. Каранджа (образец ИКВ-9, отобран А. Б. Вистелиусом в апреле 1969 г.). Относительно мелкозернистый гранит, прорывающий порфировидный, крупнозернистый гранит и включающий крупные ксенолиты его. Число зерен в исследуемой последовательности 1056, она состоит из 32 подпоследовательностей, кратчайшая подпоследовательность включает 12 зерен. $H_0 : H_1$ дает * $\chi^2 = 171$; $H_1 : H_2$ дает $\chi^2 = 12,7$. Таким образом принимается H_1 .

Проверка гипотезы однородности против гипотезы неоднородности при 186 степенях свободы при $\chi^2_{0,05} = 210$ дает наблюдаемое значение $\chi^2 = 159,6$.

$$P_{JI} = Q \begin{matrix} & \text{Or} & \text{Q} & \text{Ab} \\ \begin{matrix} \text{Or} \\ \text{Q} \\ \text{Ab} \end{matrix} & \begin{vmatrix} 0,190 & 0,462 & 0,238 \\ 65 & 158 & 119 \\ 0,405 & 0,295 & 0,300 \\ 169 & 123 & 125 \\ 0,400 & 0,509 & 0,091 \\ 106 & 135 & 24 \end{vmatrix} \end{matrix}, \quad P(a_I) = \begin{vmatrix} 0,334 \\ 353 \\ 0,409 \\ 432 \\ 0,257 \\ 271 \end{vmatrix}, \quad C = \begin{vmatrix} 0,574 & 1,180 & 1,256 \\ 1,180 & 0,727 & 1,198 \\ 1,257 & 1,198 & 0,346 \end{vmatrix}.$$

При сравнении $\tilde{P}_{JI}$ с P_{JI} при $v = 3$ получаем $\chi^2 = 1,52$. Таким образом, $0,75 > p_3(1,52) > 0,50$, т. е. согласие $\tilde{P}_{JI}$ с P_{JI} достаточно хорошее.

Из табл. 1 видно, что все диагональные элементы матрицы меньше соответствующих элементов вектора $P(a_I)$ и среди диагональных элементов имеется один, значительно меньший остальных.

Нижнепалеозойский массив Шэн у сел. того же названия, Уэстморленд, Англия (образец ЮК-8 отобран А. Б. Вистелиусом в 1967 г.). Адамит порфировидный, крупнозернистый; подсчитывалась основная масса породы в двух см от контакта ксенолита андезита серии Бородейл, погруженного в изучаемую породу. Исследуемая последовательность состоит из 946 зерен и образована 48 подпоследовательностями, из которых кратчайшая имеет 12 зерен. Проверка $H_0 : H_1$ дала $\chi^2 = 217$, $H_1 : H_2$ дала $\chi^2 = 20,7$.

Проверка гипотезы однородности против гипотезы неоднородности при 282 степенях свободы и $\chi^2_{0,05} = 322$ дала $\chi^2 = 318$, т. е. укладывается в значения, принимаемые тестами для простой, однородной цепи Маркова.

$$P_{JI} = Q \begin{matrix} & \text{Or} & \text{Q} & \text{Ab} \\ \begin{matrix} \text{Or} \\ \text{Q} \\ \text{Ab} \end{matrix} & \begin{vmatrix} 0,242 & 0,302 & 0,456 \\ 69 & 86 & 130 \\ 0,353 & 0,082 & 0,565 \\ 90 & 21 & 144 \\ 0,363 & 0,405 & 0,232 \\ 130 & 145 & 83 \end{vmatrix} \end{matrix}, \quad P(a_I) = \begin{vmatrix} 0,314 \\ 297 \\ 0,289 \\ 273 \\ 0,397 \\ 376 \end{vmatrix}, \quad C = \begin{vmatrix} 0,761 & 1,067 & 1,143 \\ 1,108 & 0,291 & 1,418 \\ 1,142 & 1,429 & 0,581 \end{vmatrix}.$$

Сравнение матриц $\tilde{P}(a_I/a_J)$ и $P(a_I/a_J)$ дает $\chi^2 \approx 0,004$, что при $v = 3$ приводит к неравенству $P_3(0,004) > 0,995$.

Из табл. 1 видно, что один из диагональных элементов в $P(a_I/a_I)$ значительно меньше остальных и каждый из диагональных элементов меньше отвечающего ему элемента вектора $P(a_I)$.

* Во всех примерах наблюдаемое значение χ^2 нужно сравнивать для альтернативы $H_0 : H_1$ с $\chi^2_{0,05}$, при 4 степенях свободы равным 9,49, и для альтернативы $H_1 : H_2$ с $\chi^2_{0,05}$, при 12 степенях свободы равным 21.

Верхнемеловой массив «Левомусукчанский» у сел. Омсукчан, ручей Венгерка бассейн р. Сугой (правый приток р. Колымы) (образец О = 51; отобран при работах А. Б. Вистелиуса и М. А. Романовой в июле 1967 г.). Анлитовидный гранит, образующий дайку, секущую крупнозер-

Таблица 1

Границы доверительных интервалов

Образец	$P(a_{Or})$	$P(a_Q)$	$P(a_{Ab})$	$P(a_{Or}/a_{Or})$	$P(a_Q/a_Q)$	$P(a_{Ab}/a_{Ab})$
ИКВ-9	0,31—0,36	0,38—0,43	0,23—0,28	0,16—0,23	0,26—0,34	0,06—0,12
ЮК-8	0,29—0,34	0,26—0,31	0,37—0,43	0,19—0,28	0,05—0,11	0,19—0,26
О-51	0,30—0,35	0,23—0,29	0,39—0,44	0,11—0,18	0,05—0,11	0,20—0,27

Примечание. Приведены границы 95% доверительных интервалов, рассчитанные по формуле (*).

нистые, порфировидные граниты. Исследуемая последовательность состоит из 967 зерен, она образована 18 подпоследовательностями, кратчайшая подпоследовательность содержит 10 зерен. $H_0 : H_1$ дает $\chi^2 = 198$; $H_1 : H_2$ дает $\chi^2 = 18,5$. Проверка гипотезы однородности против гипотезы неоднородности при 102 степенях свободы при $\chi^2_{0,05} = 126,6$ дает $\chi^2 = 95,4$.

Or

Q

Ab

Or

$P(a_I/a_J) = Q$

Ab

0,142

0,294

0,564

44

91

175

0,394

0,083

0,523

95

20

126

0,435

0,329

0,236

173

131

94

$P(a_I)$

=

0,327

316

0,256

248

0,417

403

C

=

0,432

1,167

1,342

1,176

0,323

1,266

1,342

1,264

0,568

Сравнение матриц $\tilde{P}_{JI}$ и P_{JI} дает $\chi^2 = 0,158$, что при $v = 3$ приводит к $0,990 > p_3(0,158) > 0,975$.

Табл. 1 показывает, что диагональные элементы в $P(a_I/a_I)$ меньше соответствующих им элементов в $P(a_I)$, а также что среди диагональных элементов имеется один, меньший остальных.

6. Приведенный материал показывает, что аналоги идеальных магматических гранитов существуют в природе. Таким образом, сама концепция идеального магматического гранита может быть использована в конкретных исследованиях. Теперь нужно показать, как меняются свойства идеального магматического гранита под влиянием метасоматоза.

Ленинградское отделение
Математического института им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР

Поступило
22 II 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ Р. Беллман, Введение в теорию матриц, 1969. ² Б. Л. Ван дер Варден, Математическая статистика, 1960. ³ А. Б. Вистелиус, ДАН, 187, № 2, 391 (1969). ⁴ А. Б. Вистелиус, А. В. Фаас, ДАН, 198, № 4 (1970). ⁵ Д. Б. Оуэн, Сборник статистических таблиц, 1966. ⁶ T. W. Anderson, L. A. Goodman, Ann. Math. Stat., 28, 1, 89 (1957). ⁷ P. Billingsley, Ann. Math. Stat., 32, 1, 12 (1961). ⁸ S. S. Sarkar, A. K. Saha, J. A. Miller, Nature, 215, 5104, 946 (1967). ⁹ O. T. Tuttle, N. L. Bowen, Geol. Soc. Am. Mem., 74 (1958).