

Н. Н. ФРОЛОВ

ТЕОРЕМЫ ВЛОЖЕНИЯ ДЛЯ ФУНКЦИЙ СЧЕТНОГО ЧИСЛА ПЕРЕМЕННЫХ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ К ЗАДАЧЕ ДИРИХЛЕ

(Представлено академиком В. С. Владимировым 5 VIII 1971)

1. Основные понятия и обозначения. Пусть вещественное гильбертово сепарабельное пространство H с нормой $|\cdot|$ и скалярным произведением $(\cdot, \cdot)$ оснащено ^(3, 4) гильбертовыми пространствами B и B^* : $B^* \subset H \subset B$ так, что оператор вложения J из H в B принадлежит классу Гильберта — Шмидта. В пространстве B с нормой $\|\cdot\|$ определим гауссову меру $\mu(dx)$ ^(1, 4) характеристическим функционалом $\chi(\varphi) = \exp \{-1/4 |\varphi|^2\}$. Значение линейного функционала $e \in B^*$ на элементе $x \in B$ будем обозначать через (x, e) .

Пусть G — область (открытое связное множество) в B с границей ∂G . Обозначим через $L_2(G)$ гильбертово пространство μ -измеримых на G функций (со значениями в R^1) со скалярным произведением

$$(u, v)_{L_2(G)} = \int_G u(x) v(x) \mu(dx), \quad u, v \in L_2(G).$$

Пусть $C^l(G)$, $l \geq 0$ целое, — множество непрерывных и ограниченных функций $u(x)$ на $\bar{G} = G \cup \partial G$, имеющих непрерывные и ограниченные производные (Фреше) до l -го порядка включительно. Пополнение $C^\infty(G)$ по скалярному произведению

$$(u, v)_{W_{2,H}^l(G)} = \sum_{k=0}^l \int_G (u^{(k)}(x), v^{(k)}(x))_{2,H} \mu(dx) \quad (1)$$

обозначим через $W_{2,H}^l(G)$. Здесь $(\cdot, \cdot)_{2,H,l}$ означает скалярное произведение в гильбертовом пространстве $H^l = H \otimes \dots \otimes H$, $H^0 = R^1$, являющимся тензорным произведением H самого на себя l раз ⁽³⁾ (H^l вложено в банахово пространство $\mathcal{H}^l$ вещественных l -линейных функционалов на B). $W_{2,H}^l(G)$ содержит подпространство $\tilde{W}_{2,H}^l(G)$, получаемое пополнением по скалярному произведению (1) множества $C_0^\infty(G)$ финитных в G функций из $C^\infty(G)$.

Пусть $\{e_k\}_{k=1}^\infty$ — ортонормированная в H система векторов из B^* . Определим оператор P_n в B формулой $P_n x = \sum_{k=1}^n (x, e_k) e_k$. Оператор P_n порождает разложение пространства B ,

$B = L(e_1, \dots, e_n) \oplus \text{Ker } P_n$, $x = x' + x''$, $x' \in L(e_1, \dots, e_n)$, $x'' \in \text{Ker } P_n$, которому соответствует разложение меры $\mu(dx) = \mu(dx') \times \mu''(dx'')$ ⁽²⁾.

Определение 1. Область в B вида

$$D_{e_1} = \{x \in B: x = \xi e_1 + x'', \varphi_1(x'') \leq \xi \leq \varphi_2(x''), x'' \in D_{e_1}''\},$$

где $\varphi_i(x'')$, $i = 1, 2$, — непрерывные функции на μ'' -измеримом множестве $D_{e_1}'' \subset \text{Ker } P_1$, назовем простым. Область G назовем нормальной, если существует ортонормированная в H система $\{e_k\}_{k=1}^\infty$ из B^* , образующая базис в B , такая, что для каждого e_k область G может быть представлена как объединение конечного числа простых областей $D_{e_k, i}$.

Доказательство некоторых из следующих теорем опирается на формулу интегрирования по частям

$$\int_G u(x)(v'(x), h) \mu(dx) = - \int_G v(x)(u'(x), h) \mu(dx) + 2 \int_G (x, h) uv \mu(dx),$$

справедливую для любой нормальной области G и любых $u \in W_{2,H}^1(G)$, $v \in \dot{W}_{2,H}^1(G)$, $h \in B^*$. Здесь $\dot{W}_{2,H}^1(G)$ — пространство, полученное пополнением по норме $W_{2,H}^1$ множества функций из $C^1(G)$, обращающихся в нуль на ∂G .

2. Теоремы вложения. В отличие от конечномерного случая ограниченность множества $S \subset W_{2,H}^1(G)$ в пространстве $W_{2,H}^1(G)$ не является достаточным условием для его компактности в $L_2(G)$. Однако справедлива

Теорема 1. Для того чтобы множество $S \subset W_{2,H}^1(B)$ было компактным в $L_2(B)$, достаточно, чтобы оно было ограничено в $W_{2,H}^1(B)$ и чтобы для некоторого ортонормированного в H базиса $\{e_k\}_{k=1}^\infty$, $e_k \in B^*$, равномерно по $u \in S$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_B \sum_{k=n}^\infty (u'(x), e_k)^2 \mu(dx) = 0.$$

Определим пространство $W_{2,B}^1(B)$ как пополнение $C^1(B)$ по норме

$$\|u\|_{W_{2,B}^1(B)} = \left[\int_B (u^2(x) + \|u'(x)\|^2) \mu(dx) \right]^{1/2}.$$

Следствие. Оператор вложения из $W_{2,B}^1(B)$ в $L_2(B)$ вполне непрерывен.

Теорема 2. Существует ⁽³⁾ гильбертова шкала пространств H_α , $-\infty < \alpha < \infty$, такая, что для всех $\alpha \leq 0$ целых $W_{2,H}^\alpha(B) = H_\alpha$.

Для функций $u \in W_{2,H}^1(B)$ справедливо неравенство Пуанкаре в форме

$$\int_B u^2(x) \mu(dx) \leq \frac{1}{2} \int_B |u'(x)|^2 \mu(dx) + \left(\int_B u(x) \mu(dx) \right)^2,$$

откуда следует, что для областей G с $\mu(G) < 1$ и функций $u \in \dot{W}_{2,H}^1(G)$ справедливо неравенство Фридрихса

$$\int_G u^2(x) \mu(dx) \leq [2(1 - \mu(G))]^{-1} \int_G |u'(x)|^2 \mu(dx). \quad (2)$$

Для малых областей оценка (2) становится грубой. Для целей теории граничных задач с бесконечномерными операторами в этом случае требуется более тонкая оценка, которую дает

Теорема 3. Пусть d — диаметр области G , r — радиус наименьшего шара с центром в начале, содержащего область G . Если $\sqrt{2}rd < \|J\|^2$, то для $u \in \dot{W}_{2,H}^1(G)$

$$\int_G u^2(x) \mu(dx) \leq \frac{2d^2 \|J\|^2}{\|J\|^4 - 2(rd)^2} \int_G |u'(x)|^2 \mu(dx).$$

Определение 2. Пусть при некотором $x' \in L(e_1, \dots, e_n)$ непустое множество $S(x')$ лежит в $\bar{G} \cap (x' + \text{Ker } P_n)$ и μ'' -измеримо. Будем говорить, что $S(x')$ можно дополнить в $\bar{G}$ до параллелоида, если существует параллелепипед Π в $L(e_1, \dots, e_n)$ с вершиной в точке x' такой, что $\Pi \times S \subseteq \bar{G}$ (S — проекция $S(x')$ на $\text{Ker } P_n$).

Теорема 4. Пусть $S_n(c)$ — кусок гиперплоскости

$$\pi_n(c) = \{x \in B : (x, e_k) = c_k, \quad k = 1, \dots, n\}, \quad c = \sum_{k=1}^n c_k e_k,$$

коразмерности n , лежащий в $\bar{G}$ так, что его можно дополнить в $\bar{G}$ до параллелоида. Если $l > \frac{1}{2}n + k$, то оператор вложения из $W_{2,H}^l(G)$ в $W_{2,H}^k(S_n)$ непрерывен.

3. Задача Дирихле. Предположим, что в пространстве $L_2(G)$ плотно множество $C_0^\infty(G)$. Пусть D^k — оператор, ставящий функции $u(x) \in W_{2,H}^k(G)$ ее k -ю «обобщенную производную» $u^{(k)}(x)$, являющуюся элементом пространства $L_2(G; H^k)$. Положим, по определению, $v \in \mathcal{D}(\bar{D}^k)$, если $v \in L_2(G; H^k)$ и существует функция $u \in L_2(G)$ такая, что для всех $w \in C_0^\infty(G)$

$$\int_G (v(x), w^{(k)}(x))_{2,H,k} \mu(dx) = \int_G u(x) w(x) \mu(dx).$$

На функциях $v \in \mathcal{D}(\bar{D}^k)$ определим оператор $\bar{D}^k$, сопряженный к D^k , формулой $\bar{D}^k v = u$. На достаточно гладких функциях $\bar{D}^k$ можно выписать в явном виде.

Пусть $L(B_1, B_2)$ — пространство ограниченных линейных операторов, действующих из B_1 в B_2 . На множестве $C^{2l}(G)$ определим бесконечномерный дифференциальный оператор $2l$ -го порядка формулой

$$\mathcal{L}u = \sum_{k,s=0}^l \bar{D}^s A_{k,s}(x) D^k u, \quad (3)$$

где $A_{k,s}(x)$ — ограниченная на $\bar{G}$ функция со значением в $R_{k,s} = L(H^k; H^s) \cap L(\mathcal{H}^k; \mathcal{H}^s)$, s раз непрерывно и ограничено дифференцируемая в G . Оператор (3) назовем сильно эллиптическим в G , если найдется такая постоянная $\nu > 0$, что для всех $x \in G, \xi \in H^l$

$$(A_{l,l}(x) \xi, \xi)_{2,H,l} \geq \nu \|\xi\|_{2,H,l}^2. \quad (4)$$

Теорема 5. Пусть $\mathcal{L}_0$ — сильно эллиптический оператор вида (3) в нормальной области G .

Тогда для оператора $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + kI$ при достаточно большом $k > 0$ справедливо неравенство Гординга

$$(\mathcal{L}u, u)_{L_2(G)} \geq C \|u\|_{W_{2,H}^{l,l}(G)}^2, \quad C > 0, \quad u \in C_0^\infty(G).$$

Это неравенство справедливо и для самого оператора $\mathcal{L}_0$, если диаметр области G достаточно мал.

Под обобщенным решением уравнения $\mathcal{L}u = f \in L_2(G)$ будем понимать функцию $u \in L_2(G)$, удовлетворяющую при всех $w \in C_0^\infty(G)$ тождеству $(u, \mathcal{L}^* w)_{L_2(G)} = (f, w)_{L_2(G)}$.

Теорема 6. Пусть $\mathcal{L}$ — сильно эллиптический в области G оператор вида (3), для которого справедливо неравенство Гординга.

Тогда для любых $f \in L_2(G)$, $u_0 \in W_{2,H}^l(G)$ существует единственное (в $W_{2,H}^l(G)$) обобщенное решение задачи Дирихле

$$\mathcal{L}u = f, \quad u - u_0 \in \dot{W}_{2,H}^l(G).$$

Теорема 7. Пусть $f \in W_{2,H}^p(B)$, а $\mathcal{L}$ — сильно эллиптический в B оператор вида (3), где оператор-функция $A_{k,s}(x)$, $k, s = 0, \dots, l, s + 2(l + p)$ раз непрерывно и ограничено дифференцируема в B , причем

при $\|x\| \rightarrow \infty$

$$\|A_{k,s}^{(i)}(x)\|_{\mathcal{H}^i(B, R_{k,s})} = O(\|x\|^{-I(l+p)/2}), \quad i = 1, \dots, l+p; k, s = 0, \dots, l.$$

Тогда существует $k_p \geq 0$ такое, что обобщенное решение уравнения $\mathcal{L}u + k_p u = f$ принадлежит пространству $W_{2,H}^{2l+p}(B)$. (Через $\mathcal{H}^i(B, R_{k,s})$ здесь обозначено банахово пространство, состоящее из всех i -линейных отображений из B в $R_{k,s}$.)

В заключение автор выражает благодарность С. Г. Крейну за постоянное внимание и руководство.

Дальневосточный государственный университет
Владивосток

Поступило
30 VII 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Ю. Л. Далецкий, УМН, 22, № 4 (1967). ² L. Gross, J. Functional Analysis, 1 (1967). ³ Ю. М. Березанский, Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов, Киев, 1965. ⁴ И. М. Гельфанд, Н. Я. Виленкин, Обобщенные функции, в. 4, М., 1961. ⁵ С. Г. Крейн, Ю. И. Петунин, УМН, 21, в. 2 (128) (1966).