Доклады Академии наук СССР
1971. Том 200, № 3

УДК 539.122 *ФИЗИКА*

А. Б. ШВАРЦБУРГ

ЛИНИИ ПЕРЕХОДА И ОСОБЫЕ ТОЧКИ В УРАВНЕНИЯХ НЕЛИНЕЙНОЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ОПТИКИ

(Представлено академиком А. Д. Сахаровым 30 III 1971)

Уравнения нелинейной геометрической оптики (н.г.о.) используются для описания самовоздействия интенсивных пучков электромагнитных волн в нелинейной среде ([1]). При таком описании поле волны в каждой точке среды характеризуется значением интенсивности W и направлением луча, проходящего через данную точку. Для вывода упрощенных уравнений, описывающих распределение этих величин в среде, полагают, что нелинейные отклонения лучей от основного направления распространения пучка малы, а модуль волнового вектора постоянен. Нелинейность среды описывается малой добавкой к значению диэлектрической проницаемости, причем эта добавка пропорциональна интенсивности пучка в данной точке. Для ряда задач о самовоздействии пучков такое приближение недостаточно. Ниже для случая s-поляризации найдены уравнения н.г.о., свободные от этих ограничений, и даны некоторые результаты анализа полученных уравнений.

1. Рассмотрим монохроматический пучок, распространяющийся в изотропной среде с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon = \varepsilon_0 + \Delta\varepsilon$; здесь ε_0 — диэлектрическая проницаемость среды в линейном приближении, зависит от интенсивности пучка W. Примем направление распространения пучка за ось z и рассмотрим случай, когда в плоскости, ортогональной z, все величины, характеризующие пучок, зависят лишь от x. Пусть нелинейная среда занимает полупространство $z \geqslant 0$. Ограничимся рассмотрением эффектов, возникающих при стационарном распространении слабонеоднородного пучка, когда характерный размер R, на котором существенно меняется амплитуда волны E, много больше длины волны ($kR \gg 1$, k — волновой вектор). В этом случае можно воспользоваться приближением геометрической оптики. Положим в уравнении Максвелла

$$\Delta \mathrm{E} - \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathrm{E} + \frac{\omega^2}{c^2}(\varepsilon_0 + \Delta\varepsilon)\mathrm{E} = 0, \tag{1}$$

что $E = E_y = E_0(x, z) \exp[ik_0 z + ik_0 s(x, z)]$, где $k_0 = \frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon_0}$, а $E_x = E_z = 0$. Тогда для медленно меняющихся функций безразмерной интенсивности $W = |E_0(x, z)|^2 |E_{0,\max}(x, 0)|^{-2}$ и набега фазы s получим

$$\frac{\partial s}{\partial z} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial s}{\partial z}\right)^2\right] - \frac{\omega^2}{c^2}\Delta\varepsilon = 0, \quad \frac{\partial W}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x}\left(W\frac{\partial s}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(W\frac{\partial s}{\partial z}\right) = 0. \tag{2}$$

(2) представляет собой систему уравнений н.г.о., из которых первое — уравнение эйконала, второе выражает баланс энергии.

Преобразуем систему (2), вводя угол φ между направлением луча в данной точке и осью z так, что

$$\partial s/\partial x = k_0^{-1}k\sin\varphi, \quad \partial s/\partial z = -1 + k_0^{-1}k\cos\varphi, \quad k = \frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon}.$$

Перейдем в этой системе к дифференцированию по траектории луча ($\partial / \partial l$) и по нормали, опущенной из начала координат на касательную к траектории луча ($\partial / \partial \rho$):

$$\partial / \partial l = \sin \varphi \, \partial / \partial x + \cos \varphi \, \partial / \partial z, \quad \partial / \partial \rho = \cos \varphi \, \partial / \partial x - \sin \varphi \, \partial / \partial z. \qquad (3)$$

Тогда система (2) примет вид

$$\partial k / \partial \rho - k \partial \varphi / \partial l = 0, \quad \partial (Wk) / \partial l + Wk \partial \varphi / \partial \rho = 0. \qquad (4)$$

Преобразованием переменных эта система может быть сведена к линейной ([3]). Будем рассматривать W и φ как переменные, а ρ и l — как функции. Тогда, представляя производные в (5) в виде якобианов и умножая оба уравнения (5) на $\partial (\rho, l) / \partial (W, \varphi)$, получим

$$\frac{\partial \rho}{\partial W} - \alpha \frac{\partial l}{\partial \varphi} = 0, \quad W \frac{\partial l}{\partial W} + (1 + \alpha W) \frac{\partial \rho}{\partial \varphi} = 0, \quad \alpha = \frac{1}{k} \frac{\partial k}{\partial W}. \qquad (5)$$

Эту систему можно, как и в гидродинамике, свести к одному уравнению второго порядка, воспользовавшись преобразованием годографа. Введем функцию ψ так, чтобы $l = -\alpha^{-1} \partial \psi / \partial W$; $\rho = -\partial \psi / \partial \varphi$. Тогда из (5) найдем

$$k^2 \left(W \frac{\partial^2 \psi}{\partial W^2} - \alpha^{-1} \frac{\partial \alpha}{\partial W} \frac{\partial \psi}{\partial W} \right) + \frac{\partial k}{\partial W} \frac{\partial (kW)}{\partial W} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} = 0. \qquad (6)$$

Если здесь коэффициент $\dfrac{\partial k}{\partial W} \dfrac{\partial (kW)}{\partial W}$ при некотором $W = W_0$ меняет знак, то уравнение (6) принадлежит к смешанному типу: при $\dfrac{\partial k}{\partial W} \dfrac{\partial (kW)}{\partial W} < 0$ (6) — гиперболического типа, а при $\dfrac{\partial k}{\partial W} \dfrac{\partial (kW)}{\partial W} > 0$ — эллиптического. В этом важное отличие (6) от так называемых «укороченных» уравнений н.г.о. ([1]), которые следуют из (2) при $\varphi \ll 1$, $\Delta \varepsilon = \beta W$ ($\beta = \mathrm{const}$, $|\beta| \ll 1$). Последние принадлежат к эллиптическому типу (при $\beta > 0$) и описывают фокусировку лучей, в то время как из (6) видно, что после пересечения линии $W(\rho, l) = W_0$ в плоскости (ρ, l) фокусировка может нарушиться. Линия $W(\rho, l) = W_0$ для уравнений н.г.о. является линией перехода.

Рассмотрим случай достаточно медленной зависимости $W \left(\left| \alpha^{-1} \dfrac{\partial \alpha}{\partial W} \right| \ll 1 \right)$. Пусть W_0 — корень уравнения $\partial (kW) / \partial W = 0$. Если при $W = W_0$ поток энергии kW достигает максимума, то (6) дает вблизи линии перехода

$$\partial^2 \psi / \partial \delta^2 - \delta \partial^2 \psi / \partial \theta^2 = 0, \qquad (7)$$

где $\delta = W_0 - W$, $\theta = \varphi W_0 \sqrt{k(W_0) |M|^{-1}}$, $M = \partial^2 (kW) / \partial W^2$. Уравнение (7) является известным в гидродинамике уравнением Эйлера — Трикоми (роль плотности и скорости в потоке выполняют интенсивность и групповая скорость волн в пучке) и, таким образом, имеется прямая аналогия задач о распространении световых пучков вблизи линии перехода с задачами о течении сжимаемого газа в околозвуковой области ([2]). Вблизи линии перехода при $W < W_0$ у пучка возникает тенденция к расхождению. Этот случай соответствует фокусирующей среде ($\partial \Delta \varepsilon / \partial W |_{z=0} > 0$). В расфокусирующей среде ($\partial \Delta \varepsilon / \partial W |_{z=0} < 0$) можно, как известно, фокусировать пучок, создавая специальный профиль ($\partial W / \partial x |_{z=0} > 0$) ([4]). Вблизи линии перехода пучок описывается (8), где $\delta = W - W_0$. В этом случае значение $W = W_0$ соответствует минимуму потока энергии. Расхождение идет при $W > W_0$ (гиперболическая область), значения $W < W_0$ соответствуют фокусировке.

Рассмотрим для примера случай «биквадратной» нелинейности

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + 2\beta W + \gamma W^2. \tag{8}$$

Пусть $W_{max}|_{z=0} < |\beta / \gamma|$. В фокусирующей среде $(\beta > 0,\ \gamma < 0)$ $W_0 = (4|\gamma|)^{-1}[3\beta + \sqrt{9\beta^2 + 8\varepsilon_0|\gamma|}]$; в расфокусирующей $(\beta < 0, \gamma > 0)$, если $9\beta^2 > 8\varepsilon_0\gamma$, то $W_0 = (4\gamma^{-1})\,[3|\beta| - \sqrt{9\beta^2 + 8\varepsilon_0\gamma}]$.

Уравнения н.г.о. теряют смысл после образования особенностей, что соответствует пересечению лучей пучка и возникновению области неоднозначной зависимости φ от координат. Особенность может возникнуть еще до появления линии перехода. Рассмотрим образование особенности на примере задачи о самовоздействии плоского $(\varphi|_{z=0} = 0)$ параболического пучка, имеющего на входе в нелинейную среду распределение интенсивности $W|_{z=0} = 1 - x^2$; $|x| \leqslant 1$ ([5]). Решение «укороченных» уравнений в этом случае предсказывает схлопывание всего пучка в точку, интенсивность в которой бесконечна. В отличие от этого, уравнения н.г.о. (2) позволяют вычислить конечную интенсивность в фокусе. Для этого произведем в (2) преобразование переменных, считая x, z функциями W, φ:

$$\sin\varphi\, \partial z / \partial W - \cos\varphi\, \partial x / \partial W - \alpha \sin\varphi\, \partial x / \partial\varphi - \alpha\cos\varphi\, \partial z / \partial\varphi = 0; \tag{9}$$

$$\begin{gathered}(1 + \alpha W)\sin\varphi\, \partial z / \partial\varphi - (1 + \alpha W)\cos\varphi\, \partial x / \partial\varphi - \\ - W\cos\varphi\, \partial z / \partial W - W\sin\varphi\, \partial x / \partial W = 0.\end{gathered} \tag{10}$$

Рассмотрим с помощью (9), (10) самовоздействие пучка в среде с нелинейностью (8). Разложим $\sin\varphi$ и $\cos\varphi$, удерживая члены, содержащие β и γ в первой степени (этим учитывается изменение $|\mathbf{k}|$). Производя после этого в (9) и (10) преобразование годографа ([3])

$$\begin{gathered}x = -u\frac{\partial\psi}{\partial W} - \frac{\partial\psi}{\partial u} + \beta u\left\{\left(Wq + \frac{u^2}{6}\right)\frac{\partial\psi}{\partial W} + \left(W + \frac{u^2}{2}\right)\frac{\partial\psi}{\partial u}\right\}, \quad u = \varphi\beta^{-1/2}; \\ t = -\frac{\partial\psi}{\partial W} + \beta\left\{\left(Wq + \frac{u^2}{2}\right)\frac{\partial\psi}{\partial W} + u\frac{\partial\psi}{\partial u}\right\}, \quad t = z\sqrt{\beta}, \quad q = -1 + \gamma\beta^{-2},\end{gathered} \tag{11}$$

найдем, что уравнение эйконала (9) обращается при этом в тождество (с точностью до членов $\sim\beta$, γ; весь дальнейший расчет идет с этой же точностью); (10) приводит к уравнению второго порядка для ψ. Вводя эллипсоидальные координаты (ε, η): $W_1 = (1 + \varepsilon^2)(1 - \eta^2)$, $u = 2\varepsilon\eta$, где $W_1 = W + \frac{\beta q}{3} W^2$, это уравнение можно записать в виде

$$\begin{gathered}\frac{1}{\varepsilon^2 + \eta^2}\left\{\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\left[\left(1 + \varepsilon^2\right)\frac{\partial\psi}{\partial\varepsilon}\right] + \frac{\partial}{\partial\eta}\left[\left(1 - \eta^2\right)\frac{\partial\psi}{\partial\eta}\right]\right\} = \\ = K(1 + \varepsilon^2)(1 - \eta^2)\left[\varepsilon\frac{\partial\psi}{\partial\varepsilon} - \eta\frac{\partial\psi}{\partial\eta}\right], \quad K = -2\beta\left(1 - \frac{2q}{3}\right);\end{gathered} \tag{12}$$

граничные условия к (12), соответствующие плоскому параболическому пучку:

$$\partial\psi / \partial\eta|_{\varepsilon=0} = 0; \quad \partial\psi / \partial\varepsilon|_{\varepsilon=0} = -2\eta^2. \tag{13}$$

Решение уравнения (12), удовлетворяющее (13), имеет вид

$$\begin{gathered}\psi = C_0Q_0(i\varepsilon) + P_2(\eta)\,[C_2Q_2(i\varepsilon) + D_2P_2(i\varepsilon)] + P_4(\eta)\,[C_4Q_4(i\varepsilon) + \\ + D_4P_4(i\varepsilon)] + K\left\{\frac{\pi}{28}\varepsilon^2\eta^4 - \frac{\pi}{28}\varepsilon^4\eta^2 + \frac{\varepsilon\eta^4}{14} - \frac{\varepsilon^3\eta^2}{14} + \frac{\pi\varepsilon^4}{35} + \frac{11\pi}{140}\varepsilon^2\eta^2 + \right. \\ + \frac{\pi}{35}\eta^4 + \frac{2}{35}\varepsilon^3 - \frac{19}{35}\varepsilon\eta^2 + \operatorname{arctg}\frac{1}{\varepsilon}\left[\frac{\varepsilon^4\eta^2}{14} - \frac{\varepsilon^2\eta^4}{14} - \frac{2\varepsilon^4}{35} + \frac{14\varepsilon^2\eta^2}{35} - \right. \\ \left.\left. - \frac{2\eta^4}{35} - \frac{13\varepsilon^2}{70} + \frac{13\eta^2}{70}\right]\right\}.\end{gathered} \tag{14}$$

Здесь Q_n — сплющенные сфероидальные гармоники второго рода, P_n — полиномы Лежандра

$$C_0 = \frac{2i}{3}\left[1 + \beta\left(\frac{184 - 76q}{175}\right)\right], \quad C_2 = -\frac{2i}{3}\left[1 + \beta\left(\frac{373 - 202q}{490}\right)\right],$$

$$C_4 = -\frac{6i\beta}{35}\left(\frac{79}{70} - \frac{3q}{35}\right),$$

$$D_2 = \frac{\pi}{3}\left[1 + \beta\left(\frac{1113 - 667q}{735}\right)\right], \quad D_4 = \frac{3\pi\beta}{35}\left(\frac{79}{70} - \frac{3q}{35}\right). \tag{15}$$

Из (15), (14), (11) следуют явные выражения для x и t. Приведем эти выражения лишь в области больших значений интенсивности вблизи оси ($\eta \ll 1$; $\varepsilon \gg 1$):

$$x = \eta\left[\frac{1}{1+\varepsilon^2} + F\varepsilon^3\left(1 + \frac{5\eta^2}{3}\right)\right], \quad t = \frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3\varepsilon^2} + F\varepsilon^2(1 - 5\eta^2)\right], \tag{16}$$

$$F = \frac{\pi\beta}{32}\left(15 - \frac{2\gamma}{\beta^2}\right) > 0.$$

Эти решения содержат особенность, физический смысл которой состоит в том, что лучи начинают пересекать ось пучка (аберрация). Условия возникновения такой особенности [3] следующие:

$$x = 0, \quad (\partial x / \partial u)_t = 0, \quad (\partial x / \partial W)_t = 0.$$

Особенность находится в точке $x = 0$, $t_0 = \pi / 4$. Интенсивность в этой точке

$$W_{max} = 1 + F^{-2/5}. \tag{17}$$

Как видно из (16), для осевой аберрации требуется, чтобы $\gamma > 7{,}5\beta^2$. После особой точки возникает неоднозначность в распределении интенсивности и направлений лучей в пучке. Уравнения (2) в этих областях неприменимы.

Автор благодарит А. В. Гуревича за стимулирующую критику, А. Д. Сахарова и Л. В. Келдыша за интерес к работе.

Институт земного магнетизма, ионосферы
и распространения радиоволн
Академии наук СССР
п. о. Академический городок Московск. обл.

Поступило
16 II 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. С. Ахманов, А. П. Сухоруков, Р. В. Хохлов, УФН, 93, 19 (1967). [2] Л. Д. Ландау, Е. М. Лившиц, Механика сплошных сред, 1954. [3] А. В. Гуревич, А. Б. Шварцбург, ЖЭТФ, 58, 2012 (1970). [4] Г. А. Аскарьян, ЖЭТФ, 42, 1567 (1962). [5] В. И. Таланов, Письма ЖЭТФ, 2, 218 (1965).