Доклады Академии наук СССР
1971. Том 200, № 3

УДК 519.3+62.50 *МАТЕМАТИКА*

В. А. ЯКУБОВИЧ

О СИНТЕЗЕ ОПТИМАЛЬНЫХ УПРАВЛЕНИЙ В ЛИНЕЙНОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ИГРЕ НА КОНЕЧНОМ ИНТЕРВАЛЕ ВРЕМЕНИ С КВАДРАТИЧНЫМ ФУНКЦИОНАЛОМ ПЛАТЕЖА

(Представлено академиком В. И. Смирновым 18 III 1971)

Работы Л. С. Понтрягина [1] и Н. Н. Красовского (см. список литературы в [2]) привлекли внимание к теории дифференциальных игр. Известно, что имеется не много задач достаточно общего вида (например, для дифференциальных уравнений произвольно высокого порядка), в которых удается в явной форме найти условия существования оптимальных управлений и сами оптимальные управления. Ниже рассматриваются задачи такого рода.

1°. Предположим, что состояние x системы и управления u_1, u_2 двух игроков в фиксированный момент времени описываются векторами $x \in R^n$, $u_1 \in R^{m_1}$, $u_2 \in R^{m_2}$. (Здесь и ниже через R^k обозначается k-мерное эвклидово пространство.) Предположим, что уравнение изменения состояния во времени имеет вид

$$dx/dt = Ax + bu, \quad u = \begin{Vmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Vmatrix}, \tag{1}$$

A, b — постоянные вещественные матрицы порядков $n \times n$ и $n \times m$, где $m = m_1 + m_2$. Уравнение (1) предполагается управляемым, т. е. ранг $n \times mn$ матрицы $\|b, Ab, \ldots, A^{n-1}b\|$ равен n. Пусть $x_0 \in R^n$ — заданный вектор. Функции $u_1 = u_1(x, t)$, $u_2 = u_2(x, t)$ со значениями в R^{m_1} и R^{m_2} называются *допустимыми* на $[0, T]$, если на $[0, T]$ существует абсолютно непрерывная функция $x(t)$ (называемая соответствующим решением) такая, что $x(0) = x_0$, $|u_j[x(t), t]| \in L(0, T)$, $j = 1, 2$, и для $x = x(t)$, $u_j = u_j[x(t), t]$, $j = 1, 2$, почти всюду на $[0, T]$ выполнено (1).

Пусть $F(x, u)$ — вещественная квадратичная форма своих аргументов, причем $F(0, u) = u_1^*\gamma_1 u_1 - u_2^*\gamma_2 u_2$, где $\gamma_1 > 0$, $\gamma_2 > 0$ — матрицы порядков $m_1 \times m_1$ и $m_2 \times m_2$ соответственно *.

Предположим, что первый игрок стремится минимизировать, а второй — максимизировать функционал

$$J(u_1, u_2) = \int_0^T F\{x(t), u[x(t), t]\}\, dt, \quad u = \begin{Vmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Vmatrix}, \tag{2}$$

где $x(t)$ — соответствующее решение **. Допустимые управления u_1^0, u_2^0 называются *оптимальными*, если для любых управлений u_1, u_2 таких, что пары (u_1^0, u_2), (u_1, u_2^0) допустимы, выполнено

$$J(u_1^0, u_2) \leqslant J(u_1^0, u_2^0) \leqslant J(u_1, u_2^0). \tag{3}$$

* Запись $C > 0$ $(C \geqslant 0)$, где C — матрица порядка $k \times k$, означает, что $C = C^*$ и для любого вектора $z \neq 0$ порядка k выполнено $z^*Cz > 0$ $(z^*Cz \geqslant 0)$. Звездочка здесь и ниже означает эрмитово сопряжение (в частности, транспонирование в случае вещественных векторов и матриц и комплексное сопряжение в случае вещественных чисел). Через I_k обозначается единичная $k \times k$ матрица.

** Практический интерес представляет случай, когда $x = \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Vmatrix}$, где x_1, x_2 — состояния игроков и $F(x, u) = (x_1 - x_2)^*G(x_1 - x_2) + u_1^*\gamma_1 u_2 - u_2^*\gamma_2 u_2$, где $G \geqslant 0$, $\gamma_1 > 0$, $\gamma_2 > 0$. В этом случае, говоря образно, но неточно, первый игрок стремится минимизировать, а второй — максимизировать квадратичное уклонение между ними, причем одновременно оба игрока стремятся достигнуть своей цели с минимальными затратами на управление.

Ниже устанавливается достаточное условие существование оптимальных управлений и приводится алгоритм их построения. (Функции u_1^0, u_2^0 оказываются линейными функциями x.)

Пусть λ — комплексная, ω — вещественная переменная и $B(\lambda)$ — некоторый скалярный или матричный многочлен, $B(\lambda) = B_0\lambda^N + \ldots + B_N$. Через $B(\lambda)^\nabla$ будем обозначать многочлен $B(\lambda)^\nabla = [B(-\lambda^*)]^* = B_0^*(-\lambda)^N + \ldots + B_N^*$. Пусть $\alpha(\lambda)$, $\beta(\lambda)$ — скалярные многочлены. Через ост $(\beta|\alpha)$ ниже обозначается остаток, полученный от деления $\beta(\lambda)$ на $\alpha(\lambda)$. Если $B(\lambda) = \|\beta_{jh}(\lambda)\|$ — матричный многочлен, то ост$(B|\alpha) = \|$ост$(\beta_{jh}|\alpha)\|$. Через $\langle\alpha, \beta\rangle$ обозначается общий наибольший делитель многочленов $\alpha(\lambda)$ и $\beta(\lambda)$ (со старшим коэффициентом, равным единице) и через $\langle\alpha, B\rangle$ — общий наибольший делитель $\alpha(\lambda)$ и всех $\beta_{jh}(\lambda)$.

Распространим с сохранением эрмитовости форму $F(x, u)$ на комплексные значения x и u и введем обозначения

$$A_\lambda = \lambda I_n - A, \quad \delta(\lambda) = \det A_\lambda, \quad Q(\lambda) = \delta(\lambda) A_\lambda^{-1}, \quad \Gamma = \begin{Vmatrix} \gamma_1; & 0 \\ 0; & -\gamma_2 \end{Vmatrix},$$

$$F(A_{i\omega}^{-1} bu, u) = u^*\Pi(i\omega) u, \quad \Phi(i\omega) = |\delta(i\omega)|^2 \Pi(i\omega), \tag{4}$$

$$\varphi(i\omega) = \det[\Phi(i\omega)\Gamma^{-1}] \cdot |\delta(i\omega)|^{-2},$$

$$\Omega(i\omega) = \Phi(i\omega)^{-1} |\delta(i\omega)|^2 \varphi(i\omega).$$

Здесь $\Pi(i\omega) = \Pi(i\omega)^*$ — матрица порядка $m = m_1 + m_2$ формы $F(A_{i\omega}^{-1}bu, u)$. Легко показать (см., например, ([3])), что $\Phi(i\omega)$, $\varphi(i\omega)$, $\Omega(i\omega)$ являются симметричными многочленами, т. е. $\Phi(\lambda)^\nabla = \Phi(\lambda)$, $\varphi(\lambda)^\nabla = \varphi(\lambda)$; $\Omega(\lambda)^\nabla = \Omega(\lambda)$, причем старшими членами $\Phi(\lambda)$, $\varphi(\lambda)$ являются соответственно $(-1)^n\lambda^{2n}\Gamma$, $(-1)^n\lambda^{2n}$.

Теорема 1. *Предположим, что*: а) $\langle\delta, \delta^\nabla\rangle = 1$, $\langle\varphi, \Omega\rangle = 1$; б) $\varphi(i\omega) \neq 0$ $\forall\omega$ *и, следовательно,* $\varphi(\lambda)$ *допускает факторизацию* $\varphi(\lambda) = \psi(\lambda)\psi(\lambda)^\nabla$, *где* $\psi(\lambda)$ — *многочлен со старшим членом* λ^n *такой, что* $\langle\delta^\nabla, \psi\rangle = 1$, $\langle\psi, \psi^\nabla\rangle = 1$; *пусть* $\psi(\lambda)$ — *произвольный многочлен с указанными свойствами*; в) *существует* $n \times m$ *матрица* h_0, *удовлетворяющая тождеству*

$$h_0^* q(\lambda) = \delta(\lambda)\Omega_0(\lambda) \quad \forall\lambda, \quad \text{где} \quad q(\lambda) = \text{ост}(Qb\Omega \,|\, \psi\delta), \; \Omega_0 = \text{ост}(\Omega \,|\, \psi) \tag{5}$$

(*которое после приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях* λ *переходит в систему линейных уравнений относительно элементов матрицы* h_0) *или, что равносильно* (5), *такая, что матрица* $(I_m - h_0^* A_\lambda^{-1} b)\Omega(\lambda) / \psi(\lambda)$ *является многочленом*; г) *является неособой матрица* $H_0 = H_0^*$, *однозначно определяемая из соотношения* $H_0A + A^*H_0 = F_0 - h_0\Gamma h_0^*$, *где* $F_0 = F_0^*$ — *матрица формы* $F(x, 0)$; д) *выполнено* $\det[e^{Bt}Z_0e^{B^*t} - Z_0 - H_0^{-1}] \neq 0$ $\forall\, 0 \leqslant t \leqslant T$, *где* $B = A + bh_0^*$ *и* $Z_0 = Z_0^*$ — *матрица, однозначно определяемая из соотношения* $BZ_0 + Z_0B^* = -b\Gamma^{-1}b^*$.

Тогда для любого $x_0 = x(0)$ *оптимальные управления* $u^0 = \begin{Vmatrix} u_1^0 \\ u_2^0 \end{Vmatrix}$ *существуют и определяются формулой* $u^0 = h(t)^*x$, *где*

$$h(t) = h_0 + Z(t)^{-1} b\Gamma^{-1}, \quad Z(t) = Z_0 - e^{-B(T-t)}(H_0^{-1} + Z_0)e^{-B^*(T-t)}.$$

Кроме того, выполнено $\det(\lambda I_n - B) = \psi(\lambda)$ $\forall\lambda$.

Лемма. *Пусть выполнены условия* а), б), в) *теоремы* 1 *и многочлен* $\psi(\lambda)$ *и матрицы* h_0, H_0 *определены так, как указано в пунктах* б), в), г) *теоремы* 1.

Тогда выполнено

$$F(x, u) = \frac{d}{dt}(x^*H_0x) + (u - h_0^*x)^*\Gamma(u - h_0^*x) \quad \forall x, u \tag{6}$$

и $\psi(\lambda) = \det(\lambda(I_n - B)$, *где* $B = A + bh_0^*$.

В (6) $d(x^*H_0x)/dt$ — производная в силу системы (1), т. е.

$$d(x^*H_0x)/dt = 2x^*H_0(Ax + bu).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. При дополнительном условии $\langle\varphi, \delta, \delta^\nabla\rangle = 1$ (т. е. $\langle\psi\psi^\nabla, \delta, \delta^\nabla\rangle = 1$) тождество (6) следует из утверждения II теоремы ([3]). Легко проверить, однако, что доказательство ([3]) проходит без изменения при выполнении более слабого условия $\langle\delta^\nabla, \psi\rangle = 1$, сформулированного в пункте в). Доказательство соотношения $\psi(\lambda) = \det(\lambda I_n - B)$ повторяет доказательство теоремы 2 ([4]).

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 1. Попытаемся найти $n \times n$ матрицу $H(t) = H(t)^*$ и $n \times m$ матрицу $h(t)$ такие, что $H(T) = 0$ и

$$F(x, u) = \frac{d}{dt}[x^* H(t) x] + [u - h(t)^* x]^* \Gamma [u - h(t)^* x] \quad \forall x, u, \tag{7}$$

где производная взята в силу (1). Тогда, интегрируя (7), имеем

$$J(u_1, u_2) = -x_0^* H(0) x_0 + \int_0^T (u_1 - h_1^* x)^* \gamma_1 (u - h_1^* x)\, dt -$$

$$- \int_0^T (u_2 - h_2^* x)^* \gamma_2 (u - h_2^* x)\, dt,$$

где h_j — подматрицы (порядка $n \times m_j$) матрицы $h = h(t)$: $h(t) = \|h_1; h_2\|$. Из этого представления для $J(u_1, u_2)$ сразу следует (3) для $u_j^0 = h_j^* x$, $j = 1, 2$. Таким образом, достаточно установить (7) с матрицей $h(t)$, имеющей вид, указанный в теореме 1. Тождество (7) легко преобразуется в матричное уравнение Риккати относительно $H(t) = H(t)^*$. Из леммы следует (и это наиболее существенный момент доказательства), что это уравнение имеет в качестве частных решений постоянные матрицы $H = H_0$, $h = h_0$, определяемые так, как указано в пунктах б), в), г) теоремы 1. Знание частного решения матричного уравнения Риккати дает возможность найти общее его решение. Полагая $u - h_0^* x = v$, $H_1 = H(t) - H_0$, $h_1 = h(t) - h_0$ и вычитая (6) из (7), получим

$$x^* x dH_1/dt + 2x^* H_1 (Bx + bv) - 2x^* h_1 \Gamma v + x^* h_1 \Gamma h_1^* x = 0 \quad \forall x, v.$$

Отсюда имеем

$$h_1 = H b \Gamma^{-1}, \qquad dH_1/dt + H_1 B + B^* H_1 + H_1 b \Gamma^{-1} b^* H_1 = 0.$$

Для $Z = H_1^{-1}$ получим линейное уравнение $dZ/dt = BZ + ZB^* + b\Gamma^{-1}b^*$. Так как $H(T) = 0$, то $Z(T) = -H_0^{-1}$. (По предположению (г) $\det H_0 \neq 0$.) Пусть Z_0 — частное решение, определенное так, как указано в пункте (г). (Поскольку по лемме $\det(\lambda I - B) = \psi(\lambda)$ и выполнено $\langle\psi, \psi^\nabla\rangle = 1$, то уравнение для Z_0 имеет решение и притом единственное.) При этом нужное решение $Z(t)$ имеет вид, указанный в теореме 1 *. По предположению (д) $\det Z(t) \neq 0$ $\forall 0 \leqslant t \leqslant T$. Поэтому матрицы $H(t) = H_0 + Z(t)^{-1}$, $h(t) = h_0 + Z(t)^{-1} b \Gamma^{-1}$, определены для всех $0 \leqslant t \leqslant T$ и удовлетворяют тождеству (7). Таким образом, оптимальные управления существуют и определяются так, как указано в теореме 1.

2°. Рассмотрим аналогичную неоднородную задачу. Пусть вместо (1) уравнение изменения состояния системы имеет вид

$$dx/dt = Ax + bu + f(t), \quad u = \left\| \begin{matrix} u_1 \\ u_2 \end{matrix} \right\|, \tag{8}$$

где все обозначения прежние и $f(t)$ — вектор-функция порядка n,

* Отметим, что для $Z(t)$ имеет место также формула

$$Z(t) = -e^{B(t-T)} \left[H_0^{-1} + \int_0^{T-t} e^{Bs} b \Gamma^{-1} b^* e^{B^* s}\, ds \right] \cdot e^{B^*(t-T)},$$

справедливая и в случае, когда $\langle\psi, \psi^\nabla\rangle \neq 1$.

$|f(t)| \in L(0, T)$. Пусть вместо (2) функционал платежа имеет вид

$$J(u_1, u_2) = \int_0^T \{F(x, u) + 2e(t)^* x + 2\varepsilon(t)^* u\}\, dt, \tag{9}$$

где $F(x, u)^\circ$ — квадратичная форма x и u с постоянными коэффициентами, а $e = e(t)$, $\varepsilon = \varepsilon(t)$ — вектор-функции размерностей n и m, причем $|e(t)| \in L(0, T)$, $|\varepsilon(t)| \in L(0, T)$, $|\varepsilon(t)| \in L_2(0, T)$. Оптимальные управления $u^0 = \begin{Vmatrix} u_1^0 \\ u_2^0 \end{Vmatrix}$, как и выше, должны удовлетворять неравенствам (3). Ниже используются обозначения (4).

Теорема 2. *Предположим, что выполнены условия* а) — д) *теоремы* 1.

Тогда для любого $x_0 = x(0)$ оптимальные управления u^0 существуют и определяются формулой $u^0 = h(t)^* x + \varkappa(t)$. Здесь $h(t)$ определяется так, как указано в теореме 1, $\varkappa(t) = \Gamma^{-1}[b^* r(t) - \varepsilon(t)]$, *где $r(t)$ — вектор-функция порядка n, являющаяся решением дифференциального уравнения*

$$dr / dt + [A^* + h(t) b^*] r = e(t) + h(t)\varepsilon(t) - [H_0 + Z(t)^{-1}] f(t),$$

с начальным значением $r(T) = 0$, а матрицы H_0, $Z(t)$ определяются так, как указано в теореме 1.

Доказательство. Попытаемся найти матрицы-функции $H(t) = H(t)^*$, $h(t)$, $\varkappa(t)$, $r(t)$ порядков $n \times n$, $n \times m$, $m \times 1$, $n \times 1$ соответственно и скалярную функцию $\rho(t)$ так, чтобы для функции $W(x, t) = x^* H(t) x + 2r(t)^* x + \rho(t)$ было выполнено $W(x, T) = 0 \quad \forall x$ и

$$\{\ldots\} = dW / dt + (u - h^* x - \varkappa)^* \Gamma (u - h^* x - \varkappa) \qquad \forall x, u, \tag{10}$$

где через $\{\ldots\}$ обозначено выражение в фигурных скобках в (9), а dW / dt — производная в силу (1), т. е. $dW / dt = \partial W / dt + \operatorname{grad} W \cdot [Ax + bu + f(t)]$. Приравнивая в (10) слагаемые второго порядка, получим тождество (7), из которого найдем $H(t) = H_0 + Z(t)^{-1}$ и $h(t)$, причем H_0, $Z(t)$ и $h(t)$ определяются посредством процедур, указанных в теореме 1. При этом будет выполнено $H(T) = 0$. Приравнивая в (10) члены первого порядка, получим соотношение $\varkappa = \Gamma^{-1}(b^* r - \varepsilon)$ и указанное в теореме 2 дифференциальное уравнение для r. В этом уравнении матрица-функция $h(t)$ непрерывна на $[0, T]$, а правая часть принадлежит $L[0, T]$. Следовательно, оно имеет абсолютно непрерывное решение. Приравнивая в (10) свободные члены, получим соотношение $d\rho / dt = 2r^* f + \varkappa^* \Gamma \varkappa$. Используя условия $\rho(T) = 0$, $|\varepsilon| \in L(0, T)$, $|\varepsilon| \in L_2(0, T)$, найдем абсолютно непрерывную функцию $\rho(t)$.

Итак, построена функция $W(x, t)$ указанного вида, существует почти всюду $\partial W / \partial t$ и выполнено (10). Интегрируя (10) и используя условие $W[x(T), T] = 0$, как и выше, получим (3) для $u^0 = h^* x + \varkappa$.

Ленинградский государственный университет
им. А. А. Жданова

Поступило
9 III 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Л. С. Понтрягин, УМН, 21, в. 4 (1966). [2] Н. Н. Красовский, Игровые задачи о встрече движений, «Наука», 1970. [3] В. А. Якубович, ДАН, 193, № 1 (1970). [4] В. А. Якубович, ДАН, 195, № 2 (1970).