Доклады Академии наук СССР
1971. Том 201, № 3

УДК 513.88 : 513.83 *МАТЕМАТИКА*

В. М. ЧЕРЕСИЗ

О СЛАБОЙ ПОЛНОТЕ ПРОСТРАНСТВА, СОПРЯЖЕННОГО К ПРОСТРАНСТВУ СХОДИМОСТИ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 4 V 1971)

Пусть F — линейное L-пространство, т. е. комплексная линейная система, в которой выделен класс последовательностей (называемых сходящимися), причем каждой такой последовательности $(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ ставится в соответствие некоторый элемент $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ (называемый ее пределом), так что выполнены следующие аксиомы [2]:

1) *если* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ *и* $n_1 < n_2 < \ldots$, *то* $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = x$;

2) *если* $x_n = x$ *для* $\forall n$, *то* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$;

3) *алгебраические операции непрерывны относительно сходимости в* F.

Рассмотрим линейное пространство F^*-линейных непрерывных функционалов над F (предполагается, что имеются линейные непрерывные функционалы, отличные от тождественного нуля). Нас будет интересовать вопрос о слабой полноте пространства F^*, т. е. в каком случае из $(f_m, x) \underset{m\to\infty}{\to} (f, x)$ для $\forall x \in F$ и $f_m \in F^*$ следует, что $f \in F^*$. Выполнение аксиом 1) — 3) не гарантирует этого, как показывает следующий простой пример. В качестве F рассмотрим действительное линейное пространство функций $x(t)$, непрерывных для $0 \leqslant t \leqslant 1$. Последовательность $x_n(t)$ называется сходящейся, если она в каждой точке t сходится к непрерывной функции $x(t)$. Аксиомы 1) — 3), очевидно, выполнены. Последовательность линейных непрерывных функционалов $(f_n, x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} x\left(\frac{1}{2^k}\right)$ сходится на каждой непрерывной функции $x(t)$ к предельному функционалу $(f, x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} x\left(\frac{1}{2^k}\right)$, однако последний не является непрерывным. Действительно, последовательность непрерывных функций $(n = 1, 2, 3, \ldots)$

$$x_n(t) = \begin{cases} 2^n \sin(2^{n-1}\pi t), & 0 \leqslant t \leqslant 1/2^{n-1}, \\ 0, & 1/2^{n-1} \leqslant t \leqslant 1 \end{cases}$$

стремится к нулю в F, но $(f, x_n) > 1$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, т. е. $(f, x_n) \not\to 0$, $n \to \infty$.

Для того чтобы гарантировать слабую полноту F^*, будем предполагать, что в пространстве F выполняется еще одна аксиома, связывающая алгебраические операции со сходимостью в F.

Будем говорить, что последовательность $(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ элементов из F суммируема, если последовательность частичных сумм $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i$ сходится. Последовательность $\{x_n\}$ назовем безусловно суммируемой, если любая ее подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ суммируема.

А к с и о м а 4). *Из любой последовательности, сходящейся к нулю, можно выбрать безусловно суммируемую последовательность.*

Примером пространств, удовлетворяющих этой аксиоме, могут служить полные счетно-нормированные пространства и объединения таких пространств ([1]). Последовательность $\{x_n(t)\}$ из приведенного примера, очевидно, не удовлетворяет аксиоме 4). В дальнейшем, говоря о пространстве сходимости, будем понимать линейное пространство, удовлетворяющее аксиомам 1) — 4). Для них справедлива

Т е о р е м а 1. *Пространство F^*, сопряженное к пространству сходимости F, слабо полно.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Можно считать, что все функционалы f_m действительнозначные; комплексный случай, очевидно, сводится к этому. Достаточно доказать непрерывность предельного функционала f. Предположив противное, будем иметь последовательность $\{x_n\} \underset{n\to\infty}{\to} 0$, при этом $(f, x_n) \underset{n\to\infty}{\not\to} 0$, значит, $\exists \varepsilon > 0$ и подпоследовательность номеров (снова назовем их $\{n\}$) таких, что $|(f, x_n)| \geqslant 2\varepsilon$. Отбросив некоторые члены и, если потребуется, поменяв знаки у оставшихся x_n на противоположный, можем считать $(f, x_n) \geqslant 2\varepsilon$. По аксиоме 4) из $\{x_n\} \underset{n\to\infty}{\to} 0$ выберем подпоследовательность, безусловно суммируемую (назовем ее снова $\{x_n\}$). Так как последовательность функционалов $\{f_m\}$ сходится на элементе x_1 к $(f, x_1) \geqslant 2\varepsilon$, то $\exists$ номер M_1 такой, что $(f_m, x_1) > \varepsilon$ для $m \geqslant M_1$.

Далее, так как $(f_{M_1}, x_n) \underset{n\to\infty}{\to} 0$ (ввиду непрерывности f_{M_1}), то из элементов $(x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots)$ можно выбрать подпоследовательность (назовем ее $x_{12}, x_{13}, x_{1n}, \ldots$, а x_1 назовем x_{11}) такую, что $|(f_{M_1}, x_{12})| < \varepsilon/2$; $|(f_{M_1}, x_{13})| < \varepsilon/2^2$ и т. д. Таким образом, получили первую строку элементов

$$x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1n}, \ldots$$

при этом $(f_m, x_{11}) > \varepsilon$, $m > M_1$; $|(f_{M_1}, x_{1n})| < \varepsilon/2^{n-1}$, $n \geqslant 2$.

Дальше строим по индукции. Пусть построена k-я строка элементов

$$x_{k1}, x_{k2}, \ldots, x_{kn}, \ldots,$$

так что $(f_m, x_{k1}) > \varepsilon$ для $m > M_k$ и $|(f_{M_k}, x_{kn})| < \varepsilon/2^{n-1}$, $n \geqslant 2$. Тогда находим $M_{k+1} > M_k$, так что $(f_m, z_{k2}) > \varepsilon$ для $m > M_{k+1}$ (это можно, так как $(f_m, x_{k2}) \to (f, x_{k2}) \geqslant 2\varepsilon$, $m \to \infty$); а из последовательности $(x_{k3}, x_{k4}, \ldots)$ выбираем подпоследовательность (назовем ее $x_{k+1,2}, x_{k+1,3}, \ldots$, а x_{k2} назовем $x_{k+1,1}$) таким образом, чтобы $|(f_{M_{k+1}}, x_{k+1,n})| < \varepsilon/2^{n-1}$, $n \geqslant 2$ (это можно, так как $|(f_{M_{k+1}}, x_{k+1,n})| \underset{n\to\infty}{\to} 0$ ввиду непрерывности $f_{M_{k+1}}$).

Таким образом, мы получили $(k+1)$-ю строку элементов

$$x_{k+1,1}, x_{k+1,2}, \ldots, x_{k+1,n}, \ldots,$$

при этом $(f_m, x_{k+1,1}) > \varepsilon$ для $m > M_{k+1}$ и $|(f_{M_{k+1}}, x_{k+1,n})| < \varepsilon/2^{n-1}$, $n \geqslant 2$.

Рассмотрим теперь последовательность элементов

$$x_{11}, x_{21}, \ldots, x_{n1}, \ldots$$

(это первые элементы из каждой строки). Эта последовательность является подпоследовательностью безусловно суммируемой последовательности $\{x_n\}$ и, значит, сама суммируема к некоторому $s \in F$, т. е.

$$\sum_{k=1}^{N} x_{k1} = S_N \to S, \ N \to \infty.$$

Теперь, учитывая линейность и непрерывность функционалов f_{M_k}, вычисляем

$$(f_{M_1}, S) = (f_{M_1}, x_{11}) + \sum_{k=2}^{\infty} (f_{M_1}, x_{k1}) > \bar{\varepsilon} - \bar{\varepsilon}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots\right) = \bar{\varepsilon} - \bar{\varepsilon} = 0,$$

$$(f_{M_2}, S) = (f_{M_2}, x_{11}) + (f_{M_2}, x_{21}) + \sum_{k=3}^{\infty} (f_{M_2}, x_{k1}) >$$

$$> \bar{\varepsilon} + \bar{\varepsilon} - \bar{\varepsilon}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots\right) = 2\bar{\varepsilon} - \bar{\varepsilon} = \bar{\varepsilon},$$

. . . .

$$(f_{M_N}, S) = \sum_{k=1}^{N} (f_{M_N}, x_{k1}) + \sum_{k=N+1}^{\infty} (f_{M_N}, x_{k1}) > N\bar{\varepsilon} - \bar{\varepsilon} = (N-1)\bar{\varepsilon}$$

и т. д.

Таким образом, последовательность значений функционалов f_{M_N} на элементе S неограничена, что противоречит сходимости последовательности $\{f_m\}$ на каждом элементе из F. Теорема доказана.

Докажем соответствующее утверждение для последовательности операторов, отображающих пространство сходимости F в счетно-нормированное пространство Φ.

Теорема 2. *Пусть последовательность $\{A_n\}$ линейных непрерывных операторов, отображающих пространство сходимости F в счетно-нормированное пространство Φ, сходится на каждом элементе, т. е. $A_n x \xrightarrow[n\to\infty]{} Ax$ $\forall x \in F$.*

Тогда A — тоже линейный непрерывный оператор из F в Φ.

Доказательство с некоторыми необходимыми изменениями будет следовать схеме предыдущих рассуждений. Пусть существует последовательность $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, $x_n \in F$, но $Ax_n \underset{n\to\infty}{\not\to} 0$, $Ax_n \in \Phi$. Значит, $Ax_n \underset{n\to\infty}{\not\to} 0$ по некоторой p-й норме и, выбрав подпоследовательность (снова обозначаем $\{x_n\}$), можем считать, что $\|Ax_n\|_p \geqslant 4\bar{\varepsilon}$, $n = 1, 2, \ldots$ При этом, согласно аксиоме (1), последовательность $\{x_n\}$ остается сходящейся к нулю, и, по аксиоме 4 (выбрав подпоследовательность), можем считать $\{x_n\}$ безусловно суммируемой. Так как $A_m x_1 \xrightarrow[m\to\infty]{} Ax_1$, то, в частности, есть сходимость по p-й норме, значит, найдется номер M_1, такой, что

$$\|A_m x_1 - Ax_1\|_p < \bar{\varepsilon} / 2^2, \quad m \geqslant M_1.$$

Далее, так как $A_{M_1} x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ (непрерывность A_{M_1}), то $\|A_{M_1} x_n\|_p \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Поэтому из последовательности $(x_2, x_3, \ldots)$ можно выбрать подпоследовательность (обозначим ее $(x_{12}, x_{13}, \ldots, x_{1n}, \ldots)$), а x_1 назовем x_{11}, таким образом, что $\|A_{M_1} x_{12}\|_p < \bar{\varepsilon} / 2^2$, $\|A_{M_1} x_{13}\|_p < \bar{\varepsilon} / 2^3$ и т. д. Таким образом, получили первую строку элементов

$$x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1n}, \ldots$$

При этом $\|A_m x_{11} - A_l x_{11}\|_p < \bar{\varepsilon} / 2$ и $\|A_m x_{11}\|_p > 3\bar{\varepsilon}$ для $m, l \geqslant M_1$.

Пусть уже построена k-я строка элементов

$$x_{k1}, x_{k2}, \ldots, x_{kn}, \ldots$$

таким образом, что $\|A_m x_{k1}\|_p \geqslant 3\bar{\varepsilon}$, $\|A_m x_{k1} - A_l x_{k1}\|_p < \bar{\varepsilon} / 2^k$; $m, l \geqslant M_k$, и $\|A_{M_k} x_{kn}\|_p < \bar{\varepsilon} / 2^n$, $n \geqslant 2$. Тогда в качестве $x_{k+1,1}$ берем x_{k2}. Находим номер $M_{k+1} > M_k$ такой, что $\|A_m x_{k+1,1} - Ax_{k+1,1}\|_p < \bar{\varepsilon} / 2^{k+2}$, $m \geqslant M_{k+1}$.

Из последовательности $(x_{k3}, x_{k4}, \ldots)$ выбираем подпоследовательность (обозначим $x_{k+1,2}, x_{k-+1,3}, \ldots$) так, чтобы $\|A_{M_{k+1}} x_{k+1,n}\|_p < \bar{\varepsilon}/2^n$, $n \geqslant 2$.

Получили $(k+1)$-ю строку

$$x_{k+1,1},\ x_{k+1,2}, \ldots, x_{k+1,n}, \ldots$$

При этом $\|A_m x_{k+1,1}\|_p > 3\bar{\varepsilon}$, $\|A_m x_{k+1,1} - A_l x_{k+1,1}\|_p < \bar{\varepsilon}/2^{k+1}$, $m, l \geqslant M_{k+1}$.

Теперь строим элемент $S = \sum\limits_{k=1}^{\infty} x_{k,1}$ и производим оценку

$$\|A_{M_{N+1}} S - A_{M_N} S\|_p \geqslant \|A_{M_{N+1}} x_{N+1,1}\|_p -$$

$$- \sum_{k=1}^{N} \|A_{M_{N+1}} x_{k,1} - A_{M_N} x_{k,1}\|_p - \sum_{k=N+2}^{\infty} \|A_{M_{N+1}} x_{k,1}\|_p - \sum_{k=N+1}^{\infty} \|A_{M_N} x_{k,1}\|_p >$$

$$> 3\bar{\varepsilon} - \bar{\varepsilon} \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{2^k} - \bar{\varepsilon} \sum_{k=2}^{N} \frac{1}{2^k} - \bar{\varepsilon} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{2^k} > 3\bar{\varepsilon} - \bar{\varepsilon} - \frac{1}{2}\bar{\varepsilon} - \frac{1}{2}\bar{\varepsilon} = \bar{\varepsilon}.$$

Отсюда следует, что последовательность $\{A_{M_k} S\}$ не может сходиться по p-й норме и, значит, не сходится в пространстве Ф. Полученное противоречие доказывает теорему. Доказанные теоремы содержат в себе соответствующие результаты для полных счетно-нормированных пространств и их индуктивных пределов ([1]) (являющихся, как было отмечено выше, пространствами сходимости) и оказываются удобными при построении теории обобщенных функций над пространствами основных функций с заданной сходимостью.

Институт математики
Сибирского отделения Академии наук СССР
Новосибирск

Поступило
27 IV 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов, Обобщенные функции, в. 2, М., 1958.
[2] К. Куратовский, Топология, 1, М., 1966.