

УДК 519.21

МАТЕМАТИКА

В. В. АНИСИМОВ

О СУММИРОВАНИИ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН НА ЦЕПИ МАРКОВА СО СЧЕТНЫМ РАСЩЕПЛЯЮЩИМСЯ МНОЖЕСТВОМ СОСТОЯНИЙ

(Представлено академиком В. М. Глушковым 27 IX 1971)

Пусть $X_\varepsilon = \{X_\varepsilon(k), k = 0, 1, \dots\}$ — однородная цепь Маркова со счетным множеством состояний I , $\{0\} \in I$, и матрицей переходных вероятностей $P_\varepsilon = \|p_\varepsilon(i, j)\|$, $i, j \in I$. Здесь ε — параметр серии, $\varepsilon > 0$. Обозначим $I_0 = I \setminus \{0\}$, $P_\varepsilon^{(0)} = \|p_\varepsilon(i, j)\|$, $i, j \in I_0$. Введем при каждом $\varepsilon > 0$ независимое от X_ε семейство независимых в совокупности случайных величин

$$F_\varepsilon = \{f_\varepsilon^{(k)}(l, m), l \in I_0, m \in I, k = 0, 1, \dots\},$$

распределение которых не зависит от индекса k . Пусть

$$v_\varepsilon(j) = \min \{k: X_\varepsilon(k) = 0, X_\varepsilon(0) = j\}, j \in I_0.$$

Будем изучать предельные распределения случайной величины

$$\zeta_\varepsilon(j) = \sum_{k=0}^{v_\varepsilon(j)-1} f_\varepsilon^{(k)}(X_\varepsilon(k), X_\varepsilon(k+1)), X_\varepsilon(0) = j,$$

когда вероятность выхода из I_0 стремится к нулю при $\varepsilon \rightarrow 0$. Такая схема была впервые рассмотрена В. С. Королюком ⁽¹⁾. Отдельные результаты для цепей с конечным числом состояний были получены в ⁽²⁻⁴⁾. Класс получаемых здесь распределений указывался также в ⁽⁵⁻⁷⁾, что естественно обусловлено рассматриваемыми там задачами.

Пусть матрице $P = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} P_\varepsilon^{(0)}$ соответствует конечное число возвратных классов $\langle 1 \rangle, \langle 2 \rangle, \dots, \langle r \rangle$. Обозначим

$$\tilde{P}_\varepsilon(k) = \|\tilde{p}_\varepsilon^{(k)}(i, j)\|, i, j \in \langle k \rangle, k = 1, \dots, r,$$

где

$$\tilde{p}_\varepsilon^{(k)}(i, j) = p_\varepsilon(i, j) \left(1 - \sum_{l \in \langle k \rangle} p_\varepsilon(i, l)\right)^{-1}.$$

Зафиксируем в каждом классе $\langle k \rangle$ по одному состоянию $\{y^{(k)}\} \in \langle k \rangle$ и обозначим через $\rho_\varepsilon^{(k)}(l)$, $l \in \langle k \rangle$, математическое ожидание числа попаданий в состояние $\{l\}$ между двумя последовательными попаданиями в состояние $\{y^{(k)}\}$ для цепи с матрицей $\tilde{P}_\varepsilon(k)$, $k = 1, \dots, r$. Положим

$$u_\varepsilon(k, l) = \sum_{m \in \langle k \rangle} \sum_{n \in \langle l \rangle} \rho_\varepsilon^{(k)}(m) p_\varepsilon(m, n),$$

$$k = 1, \dots, r, l = 0, \dots, r, k \neq 1, u_\varepsilon(k, k) = 0$$

(множество $\langle 0 \rangle$ состоит из одного состояния $\{0\}$).

Предположим, что для каждого $k = 1, \dots, r$

$$u_\varepsilon(k) = \sum_{l=0}^r u_\varepsilon(k, l) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0, u_\varepsilon(k) \neq 0, \quad (1)$$

$$\lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ N \rightarrow \infty}} u_\varepsilon(k)^{-1} \sum_{m > N} \sum_{n \in \langle k \rangle} \rho_\varepsilon^{(k)}(m^{(k)}) \rho_\varepsilon(m^{(k)}, n) = 0, \quad (2)$$

где $\{m^{(k)}\} \in \langle k \rangle$, причем $\langle k \rangle = \{1^{(k)}, 2^{(k)}, 3^{(k)}, \dots\}$.

Пусть $\langle \omega \rangle = \langle 1, 2, \dots, r \rangle$ — множество состояний с матрицей переходов $U_\varepsilon = \|u_\varepsilon(k)^{-1} u_\varepsilon(k, l)\|$, $k, l = 1, \dots, r$.

Определение. Множество состояний $\langle \omega \rangle$ назовем s -множеством (сообщающимся множеством), если для любых $k, l \in \langle \omega \rangle$ $p_\varepsilon(k, l, \langle \omega \rangle) \rightarrow 1$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, где $p_\varepsilon(k, l, \langle \omega \rangle)$ — вероятность попасть из $\{k\}$ в $\{l\}$ прежде, чем цепь выйдет из $\langle \omega \rangle$ (в ⁽²⁾ для этой цели был использован несколько неудачный термин «группа» и там же и в ⁽³⁾ был указан алгоритм, позволяющий проверить, образует ли $\langle \omega \rangle$ s -множество).

Положим

$$g_\varepsilon = \sum_{k=1}^r q_\varepsilon(k) u_\varepsilon(k, 0) u_\varepsilon(k)^{-1},$$

где $q_\varepsilon(k)$, $k = 1, \dots, r$, — стационарное распределение для цепи с матрицей

$$\bar{U}_\varepsilon = \|u_\varepsilon(k, l) (u_\varepsilon(k) - u_\varepsilon(k, 0))^{-1}\|, \quad k, l = 1, \dots, r.$$

Обозначим

$$\varphi_\varepsilon(l, m, \lambda) = M \exp \{i \lambda \beta_\varepsilon f_\varepsilon^{(1)}(l, m)\}, \quad l \in I_0, \quad m \in I.$$

Теорема. Пусть $\langle \omega \rangle$ — образует s -множество, при каждом $\varepsilon > 0$, $k = 1, \dots, r$, цепи с матрицей $\bar{P}_\varepsilon(k)$ соответствует один возвратный класс, выполнено (1), (2), $g_\varepsilon \neq 0$, $g_\varepsilon \rightarrow 0$, каждое подмножество $\langle k \rangle$, $k = 1, \dots, r$, имеет конечное число входов, т. е. существует лишь конечное число индексов $i_1^{(k)}, \dots, i_{r_k}^{(k)}, i_n^{(k)} \in \langle k \rangle$, $1 \leq n \leq r_k$, таких, что $p_\varepsilon(l, i_n^{(k)}) \neq 0$ при $l \in \langle k \rangle$ для всех $\varepsilon > 0$, и существует нормирующий множитель β_ε такой, что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} a_\varepsilon(l, m) (\varphi_\varepsilon(l, m, \lambda) - 1) = a_{lm}(\lambda), \quad l \in I_0, \quad m \in I, \quad (3)$$

где $a_{lm}(\lambda)$ — логарифмы характеристических функций некоторых безгранично делимых законов, $0 \leq |a_{lm}(\lambda)| < \infty$, а

$$a_\varepsilon(l, m) = \begin{cases} g_\varepsilon(k) (g_\varepsilon u_\varepsilon(k))^{-1} & \text{при } l, m \in \langle k \rangle, \\ q_\varepsilon(k) g_\varepsilon^{-1} & \text{при } l \in \langle k \rangle, \quad m \in \langle n \rangle, \\ & n \neq k, \quad k, n = 1, \dots, r, \\ 1 & \text{при } m = 0, \quad l \in I_0; \end{cases}$$

и кроме того для каждого $\langle k \rangle$, $k = 1, \dots, r$, и $m \in \langle k \rangle$, $m \neq 0$,

$$\sum_{l \in \langle k \rangle} \bar{\rho}^{(k)}(l) \bar{p}(l, m) |a_{lm}(\lambda)| < \infty, \quad (4)$$

для любого $l^{(k)} \in \langle k \rangle$, $l = 1, \dots, 2, \dots$,

$$\lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ N \rightarrow \infty}} q_\varepsilon(k) (g_\varepsilon u_\varepsilon(k))^{-1} \sum_{n > N} p_\varepsilon(l^{(k)}, n^{(k)}) |\varphi_\varepsilon(l^{(k)}, n^{(k)}, \lambda) - 1| = 0, \quad (5)$$

и

$$\lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ N \rightarrow \infty}} q_\varepsilon(k) (g_\varepsilon u_\varepsilon(k))^{-1} \sum_{l > N} \rho_\varepsilon^{(k)}(l^{(k)}) \sum_{n=1}^{\infty} p_\varepsilon(l^{(k)}, n^{(m)}) |\varphi_\varepsilon(l^{(k)}, n^{(m)}, \lambda) - 1| = 0.$$

(6)

$$k, m = 1, \dots, r.$$

Тогда независимо от $j \in I_0$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} M \exp \{i \lambda \beta_\varepsilon \zeta_\varepsilon(j)\} = \psi(\lambda) (1 - A(\lambda))^{-1}, \quad (7)$$

где

$$A(\lambda) = \sum_{k, m=1}^r A_{km}(\lambda) \bar{u}_{km}, \quad (8)$$

$$A_{km}(\lambda) = \sum_{l \in \langle k \rangle} \sum_{n \in \langle m \rangle} \bar{\rho}^{(k)}(l) \bar{p}(l, n) a_{ln}(\lambda),$$

$$\bar{u}_{km} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u_\varepsilon(k)^{-1} u_\varepsilon(k, m), \quad \bar{\rho}^{(k)}(l) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \rho_\varepsilon^{(k)}(l),$$

$$\bar{p}(l, n) = \begin{cases} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} p_\varepsilon(l, n) & \text{при } l, n \in \langle k \rangle, \quad k = 1, \dots, r, \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u_\varepsilon(k)^{-1} p_\varepsilon(l, n) & \text{при } l \in \langle k \rangle, \quad n \notin \langle k \rangle; \end{cases}$$

$$\psi(\lambda) = \sum_{k=1}^r p_k \psi_k(\lambda), \quad (9)$$

где

$$\psi_k(\lambda) = \sum_{l \in \langle k \rangle} p_k(l) (a_{l_0}(\lambda) - 1), \quad k = 1, \dots, r,$$

а

$$p_k = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (u_\varepsilon(k) g_\varepsilon)^{-1} q_\varepsilon(k) u_\varepsilon(k, 0),$$

$$p_k(l) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u_\varepsilon(k)^{-1} \rho_\varepsilon^{(k)}(l) p_\varepsilon(l, 0).$$

Замечание. Введенные величины имеют простой вероятностный смысл: $u_\varepsilon(k, l)$ — усредненная вероятность перехода из $\langle k \rangle$ в $\langle l \rangle$ за один шаг, g_ε — усредненная вероятность выхода за один шаг из $\langle \omega \rangle$, $\bar{u}_{km}$ — предел условной вероятности того, что цепь за один шаг перейдет в $\langle m \rangle$ при условии, что она вышла из $\langle k \rangle$, p_k — предел вероятности того, что цепь попадет в $\{0\}$ из класса $\langle k \rangle$, и при этом условии $p_k(l)$ — предел вероятности того, что выход в $\{0\}$ произошел из состояния $\{l\} \in \langle k \rangle$, а $\psi(\lambda)$ — характеристическая функция предельного распределения величины, которая добавилась при переходе от I_0 в $\{0\}$ ($\psi_k(\lambda)$ — предел характеристической функции условного распределения этой величины при условии, что выход в $\{0\}$ произошел из класса $\langle k \rangle$).

Киевский государственный университет
им. Т. Г. Шевченко

Поступило
23 IX 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ В. С. Королюк, Укр. матем. журн., 21, № 6 (1969). ² В. В. Анисимов, ДАН, 193, № 4 (1970). ³ В. В. Анисимов, Теория вероятн. и матем. статистика, в. 4 (1971). ⁴ Д. С. Сильвестров, Там же, в. 4 (1971). ⁵ И. Н. Коваленко, Литовск. матем. сборн., 5, № 4 (1965). ⁶ Б. В. Гнеденко, Гуссейн Фахим, ДАН, 187, № 1 (1969). ⁷ А. Д. Соловьев, Изв. АН СССР, Техническая кибернетика, № 1 (1970).