Доклады Академии наук СССР
1972. Том 203, № 1

УДК 517 *МАТЕМАТИКА*

И. Д. ЧЕРКАСОВ

ТЕНЗОРНЫЕ УСЛОВИЯ ПРИВОДИМОСТИ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ И ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

(Представлено академиком И. Н. Векуа 19 VII 1971)

1. В односвязной области Φ арифметического пространства n измерений A_n с точками $x = (x^1, \ldots, x^n)$, $n \geqslant 1$, рассмотрим k раз непрерывно дифференцируемые действительные функции C, B^α, $A^{\alpha\beta}$, $\alpha, \beta = 1, \ldots, n$, $k = 0, 1, 2$ соответственно. При условии $|A^{\alpha\beta}|_1{}^n \neq 0$ рассмотрим уравнение

$$Lf \equiv (C + B^\alpha \partial_\alpha + A^{\alpha\beta}\partial_{\alpha\beta}) f = 0 \tag{1}$$

с некоторыми краевыми условиями $K(f)$. Если это уравнение (локально) эквивалентно какому-либо уравнению вида

$$A'^{\alpha\beta}\partial'_{\alpha\beta} f' = 0, \tag{2}$$

в котором $A'^{\alpha\beta}$ — постоянные числа, то оно называется (локально) приводимым. Поскольку $A'^{\alpha\beta} = \varphi A^{\gamma\delta} u_\gamma{}^\alpha u_\delta{}^\beta$, то определитель $|A'^{\alpha\beta}|_1{}^n$ также будет отличным от нуля. Поэтому при выведении условий приводимости можно применить результаты из ([1]), сохраняя все обозначения, введенные там (при $m = 1$). В настоящем пункте исследуется полностью случай $n \geqslant 3$.

Теорема 1. *Уравнение* (1) *локально приводимо тогда и только тогда, когда во всей области* Φ

$$g = 0, \quad \partial_{[\alpha} D_{\gamma]} = 0, \quad (1 - \delta_3^n)\, C^\delta_{\alpha\beta\gamma} + \delta_3^n \nabla_{[\alpha} r_{\beta]\gamma} = 0. \tag{3}$$

При выполнении (3) *совместны две системы уравнений*:

$$\nabla_\alpha u_\beta + {}^1\!/_2 (u_\alpha u_\beta - {}^1\!/_2 A_{\alpha\beta} A^{\omega\gamma} u_\omega u_\gamma) = r_{\alpha\beta}, \tag{4}$$

$$\overset{\circ}{u}_{\varepsilon\omega} = \overset{\circ}{u}_{\alpha} \overline{\Gamma}^{\alpha}_{\varepsilon\omega}, \tag{5}$$

из которых находятся функция φ *и вектор* ψ *соответственно. Далее*:

$$V = \exp\left\{-\frac{1}{2}\int_K \left[D_\alpha + \left(\frac{n}{2} - 1\right) u_\alpha\right] dx^\alpha\right\}, \quad W = \varphi V^{-1}. \tag{6}$$

Следствие 1. *Для локальной приводимости уравнения* (1) *при* $V = 1$ *необходимо и достаточно, чтобы вектор* $D = (D_1, \ldots, D_n)$ *был потенциальным,* $C = 0$ *и чтобы тензор* $\overline{R}^\delta_{\alpha\beta\gamma}$ *обратился в нуль при замене* u_α *выражением* $2(2 - n)^{-1} D_\alpha$ *(см.* ([2]), § 3, *Следствие).*

Следствие 2. *Для приводимости* (1) *при* $\varphi = 1$ *необходимо и достаточно, чтобы тождественно*

$$\partial_{[\alpha} D_{\beta]} = 0, \quad R^\delta_{\alpha\beta\gamma} = 0, \quad 4C - D_\alpha D^\alpha - 2A^{\alpha\beta}\nabla_\alpha D_\beta = 0. \tag{7}$$

2. Если отбросить ограничение $n \geqslant 3$, то при исследовании вопроса о приводимости можно исходить непосредственно из определения эквивалентности двух уравнений. Это приводит нас к

$$LV = 0, \quad \overline{R}^\delta_{\alpha\beta\gamma} = 0, \quad D_\alpha + \partial_\alpha (|\varphi|^{1/2 n - 1} V^2) = 0. \tag{8}$$

Так как всякое двумерное риманово пространство конформно эвклидово, то отсюда вытекает

Теорема 2. *Уравнение* (1) *при* $n = 2$ *локально приводимо тогда и только тогда, когда выполнены первое и третье условия в* (7). *В частности, приводимость возможна с* $V = 1$, *если* $C = D_\alpha = 0$, *и с* $\varphi = 1$, *если выполнены все три условия в* (7).

Равенства (8) позволяют также легко рассмотреть случай $n = 1$ (преобразование обыкновенного дифференциального уравнения). А именно, уравнение (1) при $n = 1$ формулами вида

$$x' = \psi(x), \quad f = Vf' \tag{9}$$

с последующим умножением уравнения на функцию W приводится к виду $\partial_{11}'f' = 0$ в том и только в том случае, если существует неколеблющееся решение V первого уравнения в (8) для всего промежутка, где задано уравнение (1). Если такое V найдено, то φ находится из третьего равенства в (7), а $\psi(x)$ из (5). Этот вывод равносилен следствию из теоремы 2 работы ([1]) при $m = 1$.

3. Если выполнены условия локальной приводимости и существуют функции V, W и вектор ψ, определенные во всей области Φ, приводящие уравнение (1) к виду (2), тогда уравнение (1) будет приводимым в области Φ. Решение вопроса о такой глобальной приводимости имеет большое значение при рассмотрении краевых задач в неограниченных областях. Для этого надо применить некоторый произвол, имеющийся при нахождении функций φ, ψ, V, и выбрать их такими, чтобы Φ и условия $K(f)$ преобразовывались в такие Φ' и $K'(f')$, при которых можно доказать существование f' или даже записать ее в явном виде. Если f' единственна, то после возвращения к прежним переменным получим единственное решение f уравнения (1) с краевыми условиями $K(f)$. Ниже рассматривается типичный пример на применение вышеизложенной теории и этих соображений.

Пример. Пусть Φ есть область $\{y > x\}$, а Γ — ее граница $\{y = x\}$, $x^1 = x$, $x^2 = y$. Пусть $\varphi_0(x)$ есть непрерывная на всей оси x функция, причем $\varphi_0(x) \to c$ при $|x| \to \infty$, где c — конечное постоянное число, Δ, Δ' — операторы Лапласа на плоскости (x, y) и (x', y') соответственно. Обозначим, кроме того, $x^2 + y^2 - 2x + 2y + 2$ через r^2 и положим

$$B^1 = -\frac{2}{r^2}(x + 2y + 1), \quad B^2 = \frac{2}{r^2}(2x - y - 3), \quad C = \frac{5}{r^2}.$$

Требуется найти непрерывную в $\Phi + \Gamma$ функцию $f(x, y)$, принимающую значения $\varphi_0(x)$ на Γ, значение c на бесконечности и являющуюся регулярным в Φ решением уравнения

$$Cf + B^1\partial_1 f + B^2\partial_2 f + \Delta f = 0. \tag{10}$$

Так как в данном случае $A^{\alpha\beta} = \delta_\alpha^\beta$, $\Gamma_{\beta\alpha}{}^\gamma = 0$, то

$$D_1 = D^1 = B^1, \quad D_2 = D^2 = B^2, \quad \nabla_\alpha D_\beta = \nabla_\beta D_\alpha,$$

$$\partial_1 D_2 = \frac{4}{r^2}(-x^2 + y^2 + xy + 3x + y - 1) = \partial_2 D_1.$$

Легко проверить, что третье условие в (7) также выполняется; значит, по теореме 2, уравнение (10) локально приводимо. Из (7) находим: $V = re^{-2\tau}$, где $\tau = \operatorname{arctg}\dfrac{y+1}{x-1}$ при $x > 1$, $y > -1$ и $\tau = \pi + \operatorname{arctg}\dfrac{y+1}{x-1}$ при других x, y, $\frac{1}{4}\pi < \tau < \frac{5}{4}\pi$, $r > \sqrt{2}[\sin(\tau - \frac{1}{4}\pi)]^{-1}$.

Для нахождения φ применим второе уравнение в (8). Поскольку $\overline{\Gamma}_{11}{}^1 = -\overline{\Gamma}_{22}{}^1 = \overline{\Gamma}_{12}{}^2 = \overline{\Gamma}_{21}{}^2 = -\frac{1}{2}u_1$ и эти же равенства справедливы при перестановке индексов 1 и 2, то для φ получаем уравнение

$$\bar{R}_{1212} = \frac{1}{2}\left\{\Delta\left(\frac{1}{\varphi}\right) - \frac{1}{\varphi}\left[(u_1)^2 + (u_2)^2\right]\right\} = 0. \tag{11}$$

В качестве решения можем взять функцию $\varphi = {}^1/_8 r^4$, тогда получим

$$W = \varphi V^{-1} = {}^1/_8 r^3 e^{2\tau}.$$

Теперь система (5) совместна в силу выбора φ; одним из ее решений является

$$x' = \frac{1}{r^2}(2 - x^2 - y^2), \quad y' = \frac{2}{r^2}(x + y). \tag{12}$$

Введем обозначения: $\tau' = \operatorname{arctg}\dfrac{y'}{x'+1}$, $r' = \sqrt{(x'+1)^2 + y'^2}$, $\Gamma' = \{r' = 2\cos\tau'\}$, $\Phi' = \{(x')^2 + (y')^2 < 1\}$, $\bar{\varphi}_0(\tau') = 2(\cos\tau')e^{-2\tau'} \times \varphi_0(\operatorname{tg}\tau')$, $-{}^1/_2\pi \leqslant \tau \leqslant {}^1/_2\pi$, $0 \leqslant r' \leqslant 2\cos\tau'$. Теперь формулы преобразования будут

$$\tau' = {}^3/_4\pi - \tau, \quad r' = \frac{2\sqrt{2}}{r}, \quad f = re^{-2\tau}f'. \tag{13}$$

Эти формулы с последующим умножением на W переводят уравнение (10) и задачу $K(f)$ в следующие:

$$\Delta' f' = 0, \quad f'|_{\Gamma'} = \frac{1}{2\sqrt{2}} e^{3/2\pi}\bar{\varphi}_0(\tau'), \tag{14}$$

область Φ в Φ', Γ в Γ'. Непрерывность $\bar{\varphi}_0(\tau')$ очевидна, поэтому f' находится с помощью интеграла Пуассона. Значит, искомая функция $f(x, y)$ существует, единственна и находится в явном виде.

Отметим, что если бы в качестве решения уравнения (11) была выбрана другая функция, например, $\varphi = 1$, то замена аргументов не имела бы вид (12) и функция f' не была бы решением задачи Дирихле для круга. Наконец, хотя найденное преобразование, записанное в полярных координатах, имеет простой вид (13), однако преобразование (10) к полярным координатам перед нахождением (13) нецелесообразно, ибо теорема 2 не приспособлена для этого.

Нижнетагильский педагогический институт

Поступило 9 IV 1969

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] И. Д. Черкасов, ДАН, **187**, № 1, 1969. [2] R. L. Ingraham, Am. J. Math., **75**, 4, 691 (1953).