Доклады Академии наук СССР
1972. Том 203, № 4

УДК 517.9 *МАТЕМАТИКА*

А. С. БРАТУСЬ

ОЦЕНКИ В L_2 ДЛЯ ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ С ПАРАМЕТРОМ ГЛАВНОГО ТИПА И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ К УРАВНЕНИЯМ В ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБЛАСТЯХ

(Представлено академиком И. Г. Петровским 24 IX 1971)

Пусть Ω — ограниченная в R^n область, $\Theta = \{q = \sigma - i\tau;\ \sigma \in R^1, \tau \geqslant 0\}$. Рассмотрим в $\Omega \times R_\xi^n \times \Theta$ однородную по переменным $\xi \in R^n$ и $q \in \Theta$ степени единица, бесконечно гладкую по ξ, x и аналитическую по q комплекснозначную функцию $p_0(x, \xi, q)$. Через $P(x, D, q)$ обозначим псевдодифференциальный оператор (п.д.о.) с параметром (см. ([1], [3])) с главной частью символа $p_0(x, \xi, q)$, $x \in \Omega$, $\xi \in R^n$, $q \in \Theta$.

Определение 1. П.д.о. P с параметром называется оператором главного типа, если для любых $(x, \xi, q) \in \Omega \times R_\xi^n \times \Theta$, $|\xi| + |q| \neq 0$, справедливо условие

$$|\operatorname{grad}_\xi p_0(x, \xi, q)| + \left|\frac{\partial}{\partial q} p_0(x, \xi, q)\right| \neq 0. \tag{1}$$

Предварительно рассмотрим вспомогательное

Утверждение 1. *Пусть $p_0(x, \xi, q)$ — главная часть символа п.д.о. с параметром первого порядка. Предположим, что в тех точках $(x_0, \xi_0, q_0) \in \Omega \times R^n \times \Theta$, $|\xi_0| + |q_0| \neq 0$, в которых $p_0(x_0, \xi_0, q_0) = 0$,*

$$\frac{\partial}{\partial q} p_0(x_0, \xi_0, q_0) \neq 0. \tag{2}$$

Тогда существует такая окрестность U точки (x_0, ξ_0, q_0), что справедливо разложение

$$p_0(x, \xi, q) = (q - \lambda_{0U}^1(x, \xi) - i\lambda_{0U}^2(x, \xi))\, p_0^1(x, \xi, q). \tag{3}$$

Здесь $\lambda_{0U}^k(x, \xi)$, $k = 1, 2$, — вещественные функции первого порядка однородности по ξ класса C^∞ по x и ξ в U, $p_0^1(x, \xi, q)$ — аналитическая по q, бесконечно гладкая по ξ и x, однородная по ξ и q нулевого порядка функция, причем $p_0^1(x_0, \xi_0, q_0) \neq 0$.

Доказательство утверждения 1 следует из известных результатов, касающихся нулей аналитических функций.

В случае, когда функция $p_0(x, \xi, q)$ — комплексозначная при вещественных значениях параметра q, введем дополнительное предположение (см. ([5]), § 8, 5; ([8])).

Определение 2. Будем говорить, что п.д.о. P, зависящий от параметра, имеет нормальную главную часть, если в некоторой окрестности U точек $(x, \xi, q) \in \overline{\Omega} \times R_\xi^n \times \Theta$, $|\xi| + |q| \neq 0$, таких, что

$$p_0(x, \xi, q) = 0, \quad \operatorname{grad}_\xi p_0(x, \xi, q) \neq 0, \tag{4}$$

существует такая бесконечно дифференцируемая функция $a(x, \xi, \sigma, \tau)$, $x \in \Omega$, $\xi \in R^n$, $\sigma \in R^1$, $\tau \geqslant 0$, однородная степени ноль по ξ, σ и τ, что выполняется условие

$$\operatorname{Im} \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} p_0(x, \xi, \sigma)\, \overline{\frac{\partial}{\partial \xi_j} p_0(x, \xi, \sigma)} \geqslant \operatorname{Re} p_0(x, \xi, \sigma)\, \overline{a(x, \xi, \sigma, 0)}. \tag{5}$$

Т е о р е м а 1. *Пусть P — п.д.о. с параметром первого порядка главного типа с нормальной главной частью. Предположим, что в тех точках $(x, \xi, q) \in \Omega \times R_\xi^n \times \Theta$, $|\xi| + |q| \neq 0$, где $p_0(x, \xi, q) = 0$, либо выполняется условие* (2) *и в разложении* (3) $\lambda_{0U}^2(x, \xi) \geqslant 0$, *либо выполняется условие* (4) *и*

$$\operatorname{Im} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j} p_0(x, \xi, q) \frac{\partial}{\partial \xi_j} p_0(x, \xi, q) > 0, \tag{6}$$

когда точка (x, ξ, q) такова, что $\operatorname{Im} q \neq 0$ и

$$\frac{\partial}{\partial \tau}\left[\operatorname{Im} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j} p_0(x, \xi, q) \overline{\frac{\partial}{\partial \xi_j} p_0(x, \xi, q)} - \operatorname{Re} p_0(x, \xi, q) \overline{a(x, \xi, \sigma, \tau)}\right]\Bigg|_{\tau=0} > 0, \tag{7}$$

когда точка (x, ξ, q) такова, что $\operatorname{Im} q = 0$.

Тогда найдется такая постоянная C, что выполняется неравенство

$$\tau \int |u|^2 dx \leqslant C \int |Pu|^2 dx \tag{8}$$

для $u \in C_0^\infty(\Omega)$, если $-\operatorname{Im} q = \tau \geqslant \tau_0 > 0$.

З а м е ч а н и е. В случае, когда P — дифференциальный оператор с параметром и коэффициенты его главной части вещественны, условия (6) и (7) теоремы являются необходимыми. Необходимость условия (6) доказана в ([8]) (см. также ([5]), § 8.2). Для доказательства необходимости условия (7) используется пробная функция $u^\lambda = e^{i\lambda\omega(x)}\psi(x\lambda^{1/4})$, $\lambda > 0$, $w(x) \in C^\infty(R^n)$, $\psi \in C_0^\infty(R^n)$, причем вещественная функция w выбирается так, чтобы $w(x) = (x, \xi_0) + o(|x|)$, $x \to 0$, и в качестве параметра q рассматривается $q = \lambda(\sigma_0 - i\lambda^{-1/2})$. Здесь $\xi_0 \in R^n$ и $\sigma_0 \in R^1$ таковы, что $p_0(x, \xi_0, \sigma_0) = 0$ и $\frac{\partial}{\partial q} p_0(x, \xi_0, \sigma_0) = 0$.

В этом же случае можно показать, что если выполняется оценка (8) с заменой в левой части τ на τ^2, то уравнение $p_0(x, \xi, q) = 0$ имеет лишь простые вещественные корни по переменной q, что соответствует случаю $\lambda_{0U}^2(x, \xi) = 0$ в терминах разложения (3).

Для любого $x \in \overline{\Omega}$ могут осуществиться три случая: 1) для любых $\xi \in R^n$ и $q \in \Theta$ $|\xi| + |q| \neq 0$, $p_0(x, \xi, q) \neq 0$; 2) существуют такие $\xi \in R^n$ и $q \in \Theta$, что $p_0(x, \xi, q) = 0$, но $\frac{\partial}{\partial q} p_0(x, \xi, q) \neq 0$; 3) существуют такие $\xi \in R^n$ и $q \in \Theta$, что $p_0(x, \xi, q) = 0$, $\frac{\partial}{\partial q} p_0(x, \xi, q) = 0$, но $\frac{\partial}{\partial \xi_k} p_0(x, \xi, q) \neq 0$, $k = 1, 2, \ldots, n$.

В первом случае неравенство (1) следует из эллиптичности оператора P (см. ([3])). Поэтому основной интерес представляют случаи 2 и 3. Рассмотрим случай 2. Введем п.д.о. с символами $\psi_j(\xi/|\xi|, q/|q|)$, где $\{\psi_j(\xi/|\xi|, q/|q|\}$ — достаточно мелкое разбиение единицы на сфере $|\xi| + |q| = 1$. В силу утверждения 1 в некоторой окрестности U точки $(x, \xi, q) \in \overline{\Omega} \times R_\xi^n \times \Theta$, $|\xi| + |q| \neq 0$, справедливо разложение (3). Пусть $j = 1, 2, \ldots, N$ таково, что $\operatorname{Supp} \psi_j \cap U = 0$. Умножим уравнение $Pu = f$ на п.д.о. с символом $\psi_j(\xi/|\xi|, q/|q|)$, тогда, используя разложение (3), получим (см. ([6]))

$$(q - \lambda_{0j}^1 - i\lambda_{0j}^2)\psi_j u = S_j u + T_{j1} u, \quad u \in C_0^\infty(U), \tag{9}$$

причем $\operatorname{ord} S_j = 0$, $\operatorname{ord} T_{j1} \leqslant 0$.

Умножим скалярно (9) в L_2 на $\psi_j u$, обозначая $(u, v) = \int u \cdot \bar{v}\, dx$, и возьмем мнимую часть полученного выражения с противоположным знаком; тогда

$$\mathrm{Im}\,((q - \lambda_{0j}^1 - i\lambda_{0j}^2)\,\psi_j u,\ \psi_j u) = ((\tau + \lambda_{0j}^2)\,\psi_j u,\ \psi_j u) \geqslant \tau \,\|\, \psi_j u \,\|_{(0)}^2 - C_1 \,\|\, \psi_j u \,\|_{(0)}^2. \tag{10}$$

Мы здесь воспользовались уточненным неравенством Гординга (см. ([7])). Из (10) следует оценка

$$\mathrm{Im}\,(S_j f,\ \psi_j u) - \mathrm{Im}\,(T_{j1} u,\ \psi_j u) \geqslant \tau \,\|\, \psi_j u \,\|_{(0)}^2 - C_1 \,\|\, \psi_j u \,\|_{(0)}^2,$$

откуда, используя неравенство Коши — Буняковского и в силу ограниченности в L_2 п.д.о. S_j и T_{j1}, получим при достаточно больших τ неравенство (8) для $u \in C_0^\infty(U)$.

В случае (3), рассматривая точно такое же разбиение единицы, как и во втором случае, и используя неравенство

$$\|\, P\,(\psi_j u) \,\|_{(0)}^2 \geqslant 2\,(F\,(\psi_j u),\ \psi_j u),$$

где F — п.д.о. с символом старшей части

$$F_0(x,\ \xi,\ \sigma,\ \tau) =$$

$$= \mathrm{Im} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\, p_0\,(x,\ \xi,\ q)\, \overline{\frac{\partial}{\partial \xi_j}\, p_0\,(x,\ \xi,\ q)} - \mathrm{Re}\, p_0\,(x,\ \xi,\ q)\, \overline{a\,(x,\ \xi,\ \sigma,\ \tau)},$$

и неравенство $\tau^{-1} F_0(x,\ \xi,\ \sigma,\ \tau) > 0$, которое следует из условий (6) и (7), получим, учитывая (5), оценку (8) так же, как это сделано в ([8]).

Пусть $G^+ = \Omega \times \{t \geqslant 0\}$. Рассмотрим пространство $L_2^{0\gamma}(G^+)$ функций $u(x,\ t)$, определенных в области G^+, обращающихся в ноль при $t < 0$ и таких, что функция $u(x, t)\,e^{-\gamma t}$, $\gamma > 0$, суммируема с квадратом при почти всех $x \in \Omega$ и $u(x, t) \in L_2(\Omega)$ при почти всех $t \geqslant 0$.

Каждому дифференциальному оператору с параметром $P(x,\ D_x,\ q)$ можно сопоставить оператор $P(x,\ D_x,\ D_t)$ заменяя формально параметр q на $D_t = \dfrac{1}{i}\dfrac{\partial}{\partial t}$.

Оператор $P(x,\ D_x,\ q)$ будем называть соответствующим оператором с параметром к оператору $P(x,\ D_x,\ D_t)$. Не ограничивая общности, далее полагаем, что оператор P первого порядка.

Теорема 2. *Пусть $P(x,\ D_x,\ D_t)$ — дифференциальный оператор. Предположим, что соответствующий ему оператор с параметром имеет нормальную главную часть и удовлетворяет всем условиям теоремы* 1.

Тогда для любого действительного числа s существует такое число $\gamma > 0$, что если

$$P\,(x,\ D_x,\ D_t)\, u\,(x,\ t) \in L_2^{0\gamma}\,(G^+), \qquad \mathrm{Supp}\, u\,(x,\ t) \subset K \times \{t \geqslant 0\},$$

K — компактное множество из Ω и $u(x,\ t) \in H(s)\ (\Omega)$ при почти всех $t \geqslant 0$, то $u(x,\ t) \in L_2^{0\gamma}(G^+)$ и существует такая постоянная $G_{s,\,k,\,\gamma}$, что выполняется оценка

$$\iint |\, u\,|^2\, e^{-2\gamma t}\, dx\, dt \leqslant C_{s,\,k,\,\gamma} \iint |P\,(x,\ D_x,\ D_t)\, u\,|^2\, e^{-2\gamma t}\, dx\, dt.$$

Следствие. *Пусть выполняются все условия теоремы* 2 *и u_1, u_2 — такие функции, что при почти всех $t \geqslant 0$, u_1, $u_2 \in H(d)\ (\Omega)$ (d — любое действительное число). Предположим, что в некоторой окрестности боко-*

вой границы цилиндрического множества $\Omega \times \{t > 0\}$ и для любой функции $f(x, t)$

$$P(x, D_x, D_t)u_k = f(x, t), \quad k = 1, 2, \quad (x, t) \in \Omega \times \{t > 0\},$$

$$u_1\big|_{t=0} = u_2\big|_{t=0}, \quad x \in \Omega.$$

Тогда $u_1(x, t) \equiv u_2(x, t)$, $(x, t) \in \{\Omega \times t \geqslant 0\}$.

Доказательство теоремы 2 использует результаты теоремы 1, методы, развитые в ([2]), и технику осреднения из ([4]), § 2.2.

Обозначим через $L_2^\gamma(G^+)$ пространство, двойственное относительно расширения формы

$$\int u \cdot \bar{v} e^{-2\gamma t}\, dx\, dt, \quad u \in C_0^\infty(G^+), \quad v \in C_0^\infty(\bar{G}^+), \tag{11}$$

к пространству $L_2^{0\gamma}(G^+)$.

Пусть $P_\gamma(x, D_x, D_t)$ — оператор с символом $P(x, \xi, q - 2i\gamma)$. Через $P^*(x, D_x, D_t)$ обозначим оператор, сопряженный к оператору $P_\gamma(x, D_x, D_t)$ относительно формы (11). Справедлив следующий результат.

Теорема 3. *Пусть γ — достаточно большое положительное число. Предположим, что выполняются все условия теоремы* 1.

Тогда для любой функции $f(x, t) \in L_2^\gamma(G^+)$ можно найти такую функцию $v(x, t) \in L_2^\gamma(G^+)$, что $P^*(x, D_x, D_t)v(x, t) = f$ в G_1^+, $G_1^+ = \Omega_1 \times \{t \geqslant 0\}$, Ω_1 — открытое множество в Ω, $\Omega_1 \Subset \Omega$.

Пример. Пусть $P(x, D_x, D_t)$ — однородный дифференциальный оператор первого порядка, гиперболический по И. Г. Петровскому (см. ([4])), $P(x, \xi, q)$ — символ. Через $P^{(q)}(x, D_x, D_t)$ обозначим оператор, построенный по символу $P^{(q)}(x, \xi, q) = \frac{\partial}{\partial q} P(x, \xi, q)$. Пусть Ω — ограниченное в R^n множество, содержащее начало координат, и $a(x) \in C^\infty(\Omega)$ такая, что $a(0) = 0$, но существует $k = 1, 2, \ldots, n$ такое, что $\partial a(0) / \partial x_k > 0$.

Рассмотрим оператор

$$A(x, D_x, D_t) = a(x) P(x, D_x, D_t) - \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_k} (P^{(q)}(x, D_x, D_t)).$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что выполняются условия (6) и (7) для оператора с параметром, соответствующего оператору $A(x, D_x, D_t)$ и, следовательно, применимы результаты теорем 2 и 3.

Автор выражает благодарность В. В. Грушину и Г. И. Эскину за внимание и полезные советы.

Поступило
15 IX 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] М. С. Агранович, Матем. сборн., **84** (126) 1 (1971). [2] М. С. Агранович, М. И. Вишик, УМН, **19**, в. 3 (1964). [3] Л. Д. Покровский, ДАН, **188**, № 3 (1969). [4] И. Г. Петровский, Матем. сборн., **2**, 44 (1937). [5] Л. Хёрмандер, Линейные дифференциальные операторы с частными производными, М., 1965. [6] Г. И. Эскин, Матем. сборн., **82** (124), 4 (8) (1970). [7] P. Lax, L. Nirenberg, Comm. Pure Appl. Math., **19** (1966); Сборн. пер. Математика, **11**, 6 (1967). [8] А. С. Братусь, ДАН, **192**, № 6 (1970); Вестн. Моск. универ., матем., мех., № 6 (1971).