

В. Ф. ОСИПОВ

О СПЕКТРАЛЬНОМ СИНТЕЗЕ НА СФЕРЕ

(Представлено академиком В. П. Смирновым 15 IX 1971)

Пусть  $L^1(R^3)$  — банахова алгебра (относительно свертки) всех суммируемых по мере Лебега функций на  $R^3$ . Для  $f \in L^1(R^3)$   $Z(f) = \{x \in R^3: \hat{f}(x) = 0\}$ , где  $\hat{f}$  — преобразование Фурье функции  $f$ . Если  $I$  — замкнутый идеал для  $L^1(R^3)$ , то его спектром называется замкнутое множество  $Z(I) = \bigcap_{f \in I} Z(f)$ .

В настоящей работе изучаются замкнутые идеалы, спектр которых есть единичная сфера  $S^2 = \{x \in R^3: |x| = 1\}$ .

Известно <sup>(1)</sup>, что  $S^2$  не является множеством спектрального синтеза, т. е. из условия  $Z(I_1) = Z(I_2) = S^2$  не следует, вообще говоря, что  $I_1 = I_2$ . Пусть  $I(S^2) = \{f \in L^1(R^3): f = 0 \text{ на } S^2\}$  и

$$J(S^2) = \{f \in L^1(R^3): \hat{f} = 0 \text{ в окрестности } S^2\}.$$

Тогда <sup>(2)</sup>  $I(S^2)$  и  $J(S^2)$  — замкнутые идеалы,  $Z(I(S^2)) = Z(J(S^2)) = S^2$ ,  $I(S^2) \neq J(S^2)$  и, если  $I$  — любой замкнутый идеал со спектром  $S^2$ , то  $J(S^2) \subset I \subset I(S^2)$ ; поэтому  $J(S^2)$  и  $I(S^2)$  — наименьший и наибольший идеалы среди идеалов со спектром  $S^2$ . Пусть  $SO(3)$  — группа вращений для  $R^3$ ; для  $f \in L^1(R^3)$  и  $s \in SO(3)$  через  $sf$  обозначим функцию, заданную формулой  $sf(x) = f(sx)$ . Идеал  $I$  называется инвариантным, если для любых  $f \in I$  и  $s \in SO(3)$  имеем  $sf \in I$ . В <sup>(3)</sup> доказано, что среди замкнутых идеалов со спектром  $S^2$  только  $I(S^2)$  и  $J(S^2)$  являются инвариантными. Ниже приводится описание этих идеалов в терминах псевдомер специального вида.

Пусть  $\mu$  — нормированная инвариантная относительно вращения мера, сосредоточенная на  $S^2$ ,  $Y_{lk}$  — сферические функции ( $l = 0, 1, 2, \dots$ ;  $k$  целое,  $|k| \leq l$ ),  $\mu_{lk} = Y_{lk}\mu$  и  $\nu_{lkp} = \frac{\partial^p \mu_{l,k}}{\partial r^p}$ , где дифференцирование понимается в смысле теории обобщенных функций. Используя соотношение

$$\frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi e^{i\langle x, y \rangle} Y_{lk}(\alpha, \beta) \sin \beta \, d\alpha \, d\beta = (2\pi)^{-1/2} i^l Y_{l,k}(i, \theta)(r\rho)^{-1/2} J_{l+1/2}(r\rho),$$

где в сферической системе координат  $x = (r, \varphi, \theta)$  и  $y = (\rho, \alpha, \beta)$ , и асимптотические свойства функций Бесселя, можно доказать, что среди обобщенных функций  $\mu_{lk}$  и  $\nu_{lkp}$  ( $p = 1, 2, \dots$ ) псевдомерами являются только  $\mu_{lk}$  и  $\nu_{lk1}$ , причем только  $\mu_{lk}$  синтезируются (в том смысле, что  $\mu_{lk}$  принадлежит слабому замыканию подпространства мер, сосредоточенных на  $S^2$ ). Кроме того, имеет место следующая

**Теорема 1.**  $I(S^2)$  есть аннулятор для  $\{\mu_{lk}: l = 0, 1, \dots; k \text{ целое, } |k| \leq l\}$ , а  $J(S^2)$  — аннулятор для  $\{\mu_{lk}, \partial \mu_{lk} / \partial r: l = 0, 1, \dots; k \text{ целое, } |k| \leq l\}$ .

Теорема 1 и результаты Варопулоса <sup>(3)</sup> подсказывают конструкцию некоторых промежуточных идеалов. Пусть  $0 < r_1 < 1 < r_2 < \infty$ ,  $f_0 \in L^1(R^3)$  такая, что  $\hat{f}_0$  — зависящая только от радиуса гладкая функция,  $\hat{f}_0 = 0$  вне  $[r_1, r_2]$ ,  $\hat{f}_0(1) = 0$  и  $\hat{f}_0'(1) \neq 0$ . Тогда  $f_0 \in I(S^2)$ ,  $f_0 \notin J(S^2)$ . Рассмотрим наименьший замкнутый идеал  $I$ , содержащий  $J(S^2)$  и  $f_0$ . Ясно,

что  $Z(I) = S^2$ ,  $I \neq J(S^2)$  и  $I$  инвариантный. Поэтому  $I = I(S^2)$ . Рассмотрим гладкую функцию  $h$  на  $[0, \infty)$  такую, что в окрестности 0 и  $\infty$   $h = 0$  и  $h = 1$  на  $[r_1, r_2]$ .

Пусть  $E$  — замкнутое подмножество сферы  $S^2$ ,  $L(E) \subset L^1(R^3)$  состоит из функций  $g$  таких, что  $\hat{g}(x) = \hat{g}(r, \varphi, \theta) = \psi(\varphi, \theta)h(r)$ , где  $\psi \in C^\infty(S^2)$ ,  $\psi = 0$  на  $E$ . Рассмотрим  $M(E) = \overline{L(E) * f_0 + J(S^2)}$ . Тогда  $M(E)$  — замкнутый идеал. Действительно, достаточно доказать, что  $L(E) * f_0 + J(S^2)$  выдерживает свертку с функциями из плотного подмножества для  $L^1(R^3)$ , состоящего из конечных линейных комбинаций функций  $f_1$  таких, что  $\hat{f}_1(x) = \psi_1(\varphi, \theta)h_1(r)$  и  $\psi_1, h_1$  гладкие. Пусть  $f = g * f_0 + q$ , где  $g \in L(E)$ ,  $q \in J(S^2)$ . Существуют  $f_2, f_3 \in L^1(R^3)$  такие, что

$$\hat{f}_2 = h_1(1)\psi\psi_1h, \quad \hat{f}_3 = \psi\psi_1(h_1 - h_1(1))h.$$

Ясно, что  $f_1 * g = f_2 + f_3$ . Кроме того,  $\hat{f}_3 = 0$  на  $S^2$ , поэтому  $f_3 \in I(S^2)$ , а  $f_3 * f_0 \in J(S^2)$ , так как  $I^2(S^2) \subset J(S^2)$ . Следовательно,  $f_1 * f = f_2 * f_0 + (f_3 * f_0 + f_1 * q)$ ,  $f_2 \in L(E)$ ,  $f_3 * f_0 + f_1 * q \in J(S^2)$ , т. е.  $f_1 * f \in L(E) * f_0 + J(S^2)$ . Таким образом,  $M(E)$  — замкнутый идеал. Легко видеть, что  $\hat{J}(S^2) \subset M(E) \subset I(S^2)$ . Поэтому  $Z(M(E)) = S^2$ . Можно доказать, что в крайних случаях  $M(\phi) = I(S^2)$ ,  $M(S^2) = J(S^2)$ . Кроме того, имеет место

**Теорема 2.** Если  $E_1, E_2$  — замкнутые подмножества  $S^2$ ,  $E_1 \neq E_2$ , то  $M(E_1) \neq M(E_2)$ .

Эта теорема позволяет построить много промежуточных идеалов. Далее, по аналогии с  $L(E)$ , определим  $L_0(E)$  с помощью функций  $g$ , для которых  $\hat{g} = \psi h$  и  $\psi = 0$  в окрестности  $E$ . Пусть

$$M_0(E) = \overline{L_0(E) * f_0 + J(S^2)},$$

$M_0(E)$  — замкнутый идеал и  $Z(M_0(E)) = S^2$ . Ясно, что  $M_0(E) \subset M(E)$ . Можно доказать, что если  $E$  состоит из одной точки, то  $M_0(E) = M(E)$ .

В заключение отметим, что при  $n \geq 3$  имеется точно  $[1/2(n-1)] + 1$  различных инвариантных замкнутых идеалов со спектром  $S^{n-1} = \{x \in R^n: |x| = 1\}$  (3).

Основные результаты этой работы легко распространяются на общий случай  $n \geq 3$ . Это позволяет построить промежуточные замкнутые идеалы между соседними инвариантными идеалами со спектром  $S^{n-1}$ .

Ленинградский государственный университет  
им. А. А. Жданова

Поступило  
5 VII 1971

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- <sup>1</sup> L. Schwartz, C. R., **227**, 424 (1948). <sup>2</sup> W. Rudin, Fourier Analysis on Groups, N. Y., 1962. <sup>3</sup> N. Th. Varopoulos, Proc. Cambridge Phil. Soc., **62**, 379 (1966).