Доклады Академии наук СССР
1972. Том 204, № 2

МАТЕМАТИКА

В. М. АЛХИМОВА

НАИЛУЧШИЕ КВАДРАТУРНЫЕ ФОРМУЛЫ С РАВНООТСТОЯЩИМИ УЗЛАМИ

(Представлено академиком В. С. Владимировым 29 X 1971)

1. Пусть W^rL_q, $1 \leqslant q \leqslant \infty$, $r = 1, 2, \ldots,$— класс заданных на отрезке $[0, 1]$ функций $f(x)$, у которых $(r-1)$-я производная абсолютно непрерывна на $[0, 1]$, а r-я удовлетворяет условию $\|f^{(r)}\|_{L_q} \leqslant 1$.

Задача о наилучшей квадратурной формуле вида

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \sum_{k=0}^{m-1}\sum_{l=0}^{\rho} P_{k,l}f^{(l)}(x_k) + R(f), \quad 0 \leqslant \rho \leqslant r-1, \tag{1}$$

впервые сформулирована и рассмотрена для класса

$$W_0^rL_\infty = \{f\colon f \in W^rL_\infty,\ f^{(i)}(0) = 0 \quad \forall i = 1, 2, \ldots, r-1\}$$

при $\rho = r-2$, r четных и при $\rho = 0$, $r = 1, 2$ С. М. Никольским ([1, 2]). Затем рядом авторов ([2–11]) задача о наилучшей формуле вида (1) рассмотрена на классах W^rL_q, $W_0{}^rL_q$, а также

$$W_1^rL_q = \{f\colon f \in W^rL_q,\ f^{(i)}(1) = 0 \quad \forall i = 0, 1, \ldots, r-1\},$$

$$W_*^rL_q = \{f\colon f \in W^rL_q \quad f^{(i)}(0) = f^{(i)}(1) \quad \forall i = 0, 1, \ldots, r\}$$

и

$$W_{0,1}^rL_q = \{f\colon f \in W^rL_q,\quad f^{(i)}(0) = f^{(i)}(1) = 0 \quad \forall i = 0, \ldots, r-1\}$$

при ρ не ниже $r-3$. При этом оказалось, что на классах W^rL_q, $W_0{}^rL_q$ и $W_1{}^rL_q$ для $r \geqslant 2$ узлы наилучших формул вида (1) выражаются через радикалы, что для практических вычислений составляет определенную трудность. Желая избавить оптимальные квадратуры от этих недостатков, мы вводим формулы типа формулы Маркова, среди которых наилучшие имеют уже равноотстоящие узлы.

В дальнейшем, в зависимости от классов функций, будем рассматривать формулы

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{m-1}\sum_{l=0}^{\rho_k} P_{k,l}f^{(l)}(x_k) + R_1(f) = L(f) + R_1(f), \quad 0 \leqslant \rho_k \leqslant r-1, \tag{2}$$

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \sum_{l=0}^{\rho_0} P_{0,l}f^{(l)}(0) + L(f) + R_2(f), \quad 0 \leqslant \rho_0 \leqslant r-1, \tag{3}$$

$$\int_0^1 f(x)\,dx = L(f) + \sum_{l=0}^{\rho_m} P_{m,l}f^{(l)}(1) + R_3(f), \quad 0 \leqslant \rho_m \leqslant r-1, \tag{4}$$

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \sum_{l=0}^{\rho_0} P_{0,l}f^{(l)}(0) + L(f) + \sum_{l=0}^{\rho_m} P_{m,l}f^{(l)}(1) + R_4(f) \tag{5}$$

с произвольными узлами $0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{m-1} < 1$.

В ([12]) установлено, что для $f \in W^rL_q$ наилучшие формулы вида (1) точны для многочленов степени не выше $r-1$. Это утверждение справедливо и для наилучших формул вида (2)—(5).

Обозначим через $\mathfrak{M}_s$, $s=1,2,3,4$, соответственно классы $W^r_{0,1}L_q$, $W_1{}^rL_q$, $W_0{}^rL_q$ и W^rL_q. Так же, как в ([2]), получаем, что

$$\mathscr{E}^r_m(\mathfrak{M}_s)=\sup_{f\in\mathfrak{M}_s}|R_s(f)|=\frac{1}{r!}\|F_s(t)\|_{L_p},\qquad \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1,$$

$$F_1(t)=\frac{(1-t)^r+(-t)^r}{2}-\frac{1}{2}\sum_{i=k+1}^{m-1}\sum_{l=0}^{\rho_i}\mu_{i,l}(x_i-t)^{r-l-1}+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k}\sum_{l=0}^{\rho_i}\mu_{i,l}(x_i-t)^{r-l-1},$$

$$x_k\leqslant t<x_{k+1},\quad k=0,1,\ldots,m-1;\quad x_0=0,x_m=1;$$

$$F_2(t)=(-t)^r+\sum_{l=0}^{\rho_0}\mu_{0,l}(-t)^{r-l-1}+\sum_{i=1}^{k}\sum_{l=0}^{\rho_i}\mu_{i,l}(x_i-t)^{r-l-1},$$

$$x_k\leqslant t<x_{k+1},\quad k=0,1,\ldots,m-1;\quad x_m=1;$$

$$F_3(t)=(1-t)^r-\sum_{i=h+1}^{m-1}\sum_{l=0}^{\rho_i}\mu_{i,l}(x_i-t)^{r-l-1}-\sum_{l=0}^{\rho_m}\mu_{m,l}(1-t)^{r-l-1},$$

$$x_k\leqslant t<x_{k+1},\quad k=0,1,\ldots,m-1;\quad x_0=0;$$

$$F_4(t)=\frac{1}{2}\sum_{l=0}^{\rho_0}\mu_{0,l}(-t)^{r-l-1}+F_1(t)-\frac{1}{2}\sum_{l=0}^{\rho_m}\mu_{m,l}(1-t)^{r-l-1},$$

$$x_k\leqslant t<x_{k+1},\quad k=0,1,\ldots,m-1;$$

$$\mu_{k,l}=\frac{r!}{(r-l-1)}P_{k,l}.$$

Ниже приводим формулировки нескольких теорем, идею доказательства которых можно найти в ([2, 6, 9, 10]). Будем пользоваться обозначениями: $T_r(x)$ — полином Чебышева первого рода, $X_r(x)$ — полином Лежандра, $R_r(x)$ — полином степени r с фиксированным старшим коэффициентом, равным единице, наименее уклоняющийся от нуля в метрике $L_p[-1,1]$.

2. Пусть $f\in W^rL_q$. В этом случае для приближенного вычисления интеграла $\int\limits_0 f(x)dx$ используем формулу (5). Для нее

$$\mathscr{E}^r_m(W^rL_q)=\frac{1}{r!}\|F_4(t)\|_{L_p}.$$

Теорема 1. *Среди квадратурных формул вида* (5) *при* $\rho_0=\rho_m=r-1$, $\rho_k=\rho=r-1$, $k=1,2,\ldots,m-1$; $r=1,2,3,\ldots$, *или* $r-2$, $k=1,2,\ldots,m-1$; $r=2,4,6,\ldots$, *наилучшей на классе* W^rL_q *является единственная формула*

$$\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\approx\frac{1}{r!}\sum_{l=0}^{r-1}\frac{R_r^{(r-l-1)}(1)}{(2m)^{l+1}}[f^{(l)}(0)+(-1)^lf^l(1)]+$$

$$+\frac{2}{r!}\sum_{k=1}^{m-1}\sum_{l=0}^{[\rho/2]}\frac{R_r^{(r-2l-1)}(1)}{(2m)^{2l+1}}f^{(2l)}\left(\frac{k}{m}\right),$$

причем

$$\mathscr{E}^r_m(W^rL_q)=\frac{(rp+1)^{-1/p}R_r(1)}{r!\,2^rm^r}.\tag{6}$$

Теорема 2. *Среди квадратурных формул вида* (5) *при* $\rho_0=\rho_m=r-2$, $\rho_k=\rho=r-2$ *или* $r-3$, $k=1,2,\ldots,m-1$; $r=3,5,7,\ldots$, *наилучшей на классе* W^rL *является единственная формула*

$$\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\approx\frac{1}{r!}\sum_{l=0}^{r-2}\frac{T_r^{(r-l-1)}\left(\cos\frac{\pi}{2r}\right)}{\left(2m\cos\frac{\pi}{2r}\right)^{l+1}}[f^{(l)}(0)+(-1)^lf^{(l)}(1)]+$$

$$+\frac{2}{r!}\sum_{k=1}^{m-1}\sum_{l=0}^{[\rho/2]}\frac{T_r^{(r-2l-1)}\left(\cos\frac{\pi}{2r}\right)}{\left(2m\cos\frac{\pi}{2r}\right)^{2l+1}}f^{(2l)}\left(\frac{k}{m}\right),$$

причем

$$\mathscr{E}_m^r(W^rL)=2^{1-2r}(r!)^{-1}\left(m\cos\frac{\pi}{2r}\right)^{-r}. \qquad (7)$$

Теорема 3. *Среди квадратурных формул вида* (5) *при* $\rho_0=\rho_m$, $\rho_k=\rho=r-2$ или $r-3$, $k=1,2,\ldots,m-1$; $r=3,5,7,\ldots$, *наилучшей на классе* W^rL_2 *является единственная формула*

$$\int_0^1 f(x)\,dx\approx\frac{1}{r!}\sum_{l=0}^{r-2}(2m)^{-l-1}\left[X_r^{(r-l-1)}(1)-\frac{2}{(2r-1)(r-1)}X_{r-1}^{(r-l)}(1)\right]\times$$
$$\times[f^{(l)}(0)+(-1)^l f^{(l)}(1)]+\frac{2}{r!}\sum_{k=1}^{m-1}\sum_{l=0}^{[\rho/2]}(2m)^{-2l-1}\left[X_r^{(r-2l-1)}(1)-\right.$$
$$\left.-\frac{2}{(2r-1)(r-1)}X_{r-1}^{(r-2l)}\right]f^{(2l)}\left(\frac{k}{m}\right);$$

при этом

$$\mathscr{E}_m^r(W^rL_2)=\frac{r!}{(2r)!}\sqrt{\frac{(r+1)(r+2)}{r(r-1)(2r+1)}}\frac{1}{m^r}. \qquad (8)$$

3. Пусть $f\in W_0{}^rL_q$. В ([9]) для этого класса функций рассматривалась формула (4). Здесь для нее сформулируем следующие утверждения.

Теорема 4. *Среди квадратурных формул вида* (4) *при* $\rho_m=r-2$, $\rho_k=\rho=r-2$ *или* $r-3$, $k=1,2,\ldots,m-1$; $r=3,5,7,\ldots$, *наилучшей на классе* $W_0{}^rL$ *является единственная формула*

$$\int_0^1 f(x)\,dx\approx\frac{2}{r!}\sum_{k=1}^{m-1}\sum_{l=0}^{[\rho/2]}\frac{T_r^{(r-2l-1)}\left(\cos\frac{\pi}{2r}\right)}{\left(2m\cos\frac{\pi}{2r}\right)^{2l+1}}f^{(2l)}\left(\frac{k}{m}\right)+$$
$$+\frac{1}{r!}\sum_{l=0}^{r-2}\frac{(-1)^l T_r^{(r-l-1)}\left(\cos\frac{\pi}{2r}\right)}{\left(2m\ \text{os}\frac{\pi}{2r}\right)^{l+1}}f^{(l)}(1);$$

для этой формулы $\mathscr{E}_m{}^r(W_0{}^rL)$ *имеет вид* (7).

Теорема 5. *Среди квадратурных формул вида* (4) *при* $\rho_m=r-2$, $\rho_k=\rho=r-2$ *или* $r-3$; $k=1,2,\ldots,m-1$; $r=3,5,7,\ldots$, *наилучшей на классе* $W_0{}^rL_2$ *является единственная формула*

$$\int_0^1 f(x)\,dx\approx\frac{2}{r!}\sum_{k=1}^{m-1}\sum_{l=0}^{[\rho/2]}(2m)^{2\ l-1}\left[X_r^{(r-2l-1)}(1)-\frac{2}{(2r-1)(r-1)}X_{r-1}^{(r-2l)}\right]f^{(2l)}\left(\frac{k}{m}\right)+$$
$$+\frac{1}{r!}\sum_{l=0}^{r-2}(2m)^{-l-1}\left[X_r^{(r-l-1)}(1)-\frac{2}{(2r-1)(r-1)}X_{r-1}^{(r-l)}(1)\right](-1)^l f^{(l)}\quad(1);$$

при этом $\mathscr{E}_m{}^r(W^rL_2)$ *имеет вид* (8).

4. Пусть $f\in W_1{}^rL_q$. В этом случае рассматриваем формулу (3).

Теорема 6. *Среди квадратурных формул вида* (3) *при* $\rho_0=r-1$, $\rho_k=\rho=r-1$, $k=1,2,\ldots,m-1$; $r=1,2,\ldots$, *или* $r-2$, $k=1,2,\ldots,m-1$; $r=2,4,6,\ldots$, *наилучшей на классе* $W_1{}^rL_q$ *является единственная формула*

$$\int_0^1 f(x)\,dx\approx\frac{1}{r!}\sum_{l=0}^{r-1}\frac{R_r^{(r-l-1)}(1)}{(2m)^{l+1}}f^{(l)}(0)+\frac{2}{r!}\sum_{k=1}^{m-1}\sum_{l=0}^{[\rho/2]}\frac{R_r^{(r-2l-1)}(1)}{(2m)^{2l+1}}f^{(2l)}\left(\frac{k}{m}\right);$$

при этом $\mathscr{E}_m{}^r(W_1{}^rL_q)$ *имеет вид* (6).

Теорема 7. *Среди квадратурных формул вида* (3) *при* $\rho_0 = r-2$, $\rho_k = \rho = r-2$ *или* $r-3$, $k = 1, 2, \ldots, m-1$; $r = 3, 5, 7, \ldots$, *наилучшей на классе* $W_1{}^r L$ *является единственная формула*

$$\int_0^1 f(x)\,dx \approx \frac{1}{r!} \sum_{l=0}^{r-2} \frac{T_r^{(r-l-1)}\left(\cos \frac{\pi}{2r}\right)}{\left(2m \cos \frac{\pi}{2r}\right)^{l+1}} f^{(l)}(0) +$$

$$+ \frac{2}{r!} \sum_{k=1}^{m-1} \sum_{l=0}^{[\rho/2]} \frac{T_r^{(r-2l-1)}\left(\cos \frac{\pi}{2r}\right)}{\left(2m \cos \frac{\pi}{2r}\right)^{2l+1}} f^{(2l)}\left(\frac{k}{m}\right),$$

для этой формулы $\mathscr{E}_m{}^r(W_1{}^r L)$ *имеет вид* (7).

Теорема 8. *Среди квадратурных формул вида* (3) *при* $\rho_0 = r-2$, $\rho_k = \rho = r-2$ *или* $r-3$, $k-1, 2, \ldots, m-1$; $r = 3, 5, 7, \ldots$, *наилучшей на классе* $W_1{}^r L_2$ *является единственная формула*

$$\int_0^1 f(x)\,dx \approx \frac{1}{r!} \sum_{l=0}^{r-2} (2m)^{-l-1} \left[X_r^{(r-l-1)}(1) - \frac{2}{(2r-1)(r-1)} X_{r-1}^{(r-l)}(1)\right] f^{(l)}(0) +$$

$$+ \frac{2}{r!} \sum_{k=1}^{m-1} \sum_{l=0}^{[\rho/2]} (2m)^{-2l-1} \left[X_r^{(r-2l-1)}(1) - \frac{2}{(2r-1)(r-1)} X_{r-1}^{(r-2l)}(1)\right] f^{(2l)}\left(\frac{k}{m}\right)$$

и $\mathscr{E}_m{}^r(W_1{}^r L_2)$ *имеет вид* (8).

5. Пусть $f \in W_{0,1}^r L_q$. В этом случае удобно пользоваться формулой вида (2).

Теорема 9. *Среди квадратурных формул вида* (2) *при* $\rho_k = \rho = r-2$ *или* $r-3$, $k = 1, 2, \ldots, m-1$; $r = 3, 5, 7, \ldots$, *наилучшей на классе* $W_{0,1}^r L$ *является единственная формула*

$$\int_0^1 f(x)\,dx \approx \frac{2}{r!} \sum_{k=1}^{m-1} \sum_{l=0}^{[\rho/2]} \frac{T_r^{(r-2l-1)}\left(\cos \frac{\pi}{2r}\right)}{\left(2m \cos \frac{\pi}{2r}\right)^{2l+1}} f^{(2l)}\left(\frac{k}{m}\right)$$

и $\mathscr{E}_m{}^r(W_{0,1}^r L)$ *имеет вид* (7).

Теорема 10. *Среди квадратурных формул вида* (2) *при* $\rho_k = \rho = r-2$ *или* $r-3$, $k = 1, 2, \ldots, m-1$; $r = 3, 5, 7, \ldots$, *наилучшей на классе* $W_{0,1}^r L_2$ *является единственная формула*

$$\int_0^1 f(x)\,dx \approx$$

$$\approx \frac{2}{r!} \sum_{k=1}^{m-1} \sum_{l=0}^{[\rho/2]} (2m)^{-2l-1} \left[X_r^{(r-2l-1)}(1) - \frac{2}{(2r-1)(r-1)} X_{r-1}^{(r-2l)}(1)\right] f^{(2l)}\left(\frac{k}{m}\right)$$

и $\mathscr{E}_m{}^r(W_{0,1}^r L_2)$ *имеет вид* (8).

Поступило
20 IX 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. М. Никольский, УМН, в. 2, 36, 165 (1950). [2] С. М. Никольский, Квадратурные формулы, М., 1958. [3] Г. Я. Доронин, Сборн. научн. тр. Днепропетровск. инж.-строит. инст., 1—2, 1955, стр. 210. [4] Т. А. Шайдаева, Тр. Матем. инст. им. В. А. Стеклова АН СССР, 53, 313 (1959). [5] И. И. Ибрагимов, Р. М. Алиев, ДАН, 162, № 1, 23 (1965). [6] М. Б. Аксень, А. Х. Турецкий, ДАН, 166, № 5, 1019 (1966). [7] Н. Е. Лушпай, Матер. межвузовск. конфер. молодых ученых-математиков, Харьков, 1966, стр. 58. [8] Н. Е. Лушпай, Матем. заметки, 6, № 4, 475 (1969). [9] Н. П. Корнейчук, Н. Е. Лушпай, Изв. АН СССР, сер. матем., 33, 6, 1416 (1969). [10] М. Ю. Лушпай, V наук. конфер. матем. України, Київ, 1970, стр. 71. [11] Н. Е. Гребенюк, Научн. зап. асп. Днепропетровск. унив., 1970, стр. 67. [12] М. И. Левин, Изв. АН ЭстССР, сер. физ.-матем., 20, 1 (1971).