Доклады Академии наук СССР
1972. Том 202, № 6

УДК 533.6.011.72 *ФИЗИКА*

В. А. БЕЛОКОНЬ

ВЛИЯНИЕ РАДИАЦИИ НА АМПЛИТУДУ ИЗОТЕРМИЧЕСКОГО СКАЧКА

(Представлено академиком Я. Б. Зельдовичем 17 V 1971)

Однозначное непрерывное решение для стационарной структуры достаточно сильной ударной волны не существует для некоторого класса сред и механизмов теплопередачи — при игнорировании непрерывной диссипации иного вида. Однозначность достигается постулированием ([1-4]) «изотермического субскачка» (и.т.с.), в котором происходит разрывная теплопередача с добавочной диссипацией, обусловленной игнорированными механизмами. Покажем, что влияние радиации может приводить и к ослаблению, и к усилению и.т.с.

Представим в следующем виде первый закон термодинамики для одномерного течения сквозь ударный фронт, разделяющий стационарные состояния:

$$\Delta E \equiv \Delta Q - \Delta W \equiv \Delta Q - \int\limits_0^1 P^{xx} dV = \Delta Q - {}^1/_2 (P_1^{xx} + P_0^{xx})\,\Delta V. \qquad (1)$$

Пусть среда локально равновесна и состоит из вещества и радиации:

$$P \equiv P_{\text{в}} + P_{\text{р}} \equiv (1 + \mathscr{P}); \qquad P_{\text{в}} \equiv NkT/V \equiv 2E_{\text{в}}/(fV) \equiv (\gamma - 1)E_{\text{в}}/V;$$
$$P_{\text{р}} \equiv CT^4 \equiv E_{\text{р}}/(3V); \qquad (2)$$
$$d(E_{\text{в}} + E_{\text{р}}) \equiv dQ - P^{xx}dV = T\,dS - P\,dV; \quad \Delta S_{\text{в}} = Nk\left(\frac{f}{2}\ln\frac{T_1}{T_0} - \ln\frac{V_0}{V_1}\right)$$
$$\Delta S_{\text{р}} = 4C\Delta(T^3 V).$$

Для сильных скачков, определяемых неравенствами $P_1^{xx} \gg P_0^{xx}$; $E_1 \gg E_0$, в такой среде предельная степень ударного сжатия составляет

$$\frac{V_0}{V_1} = 1 + \left(\frac{P}{P^{xx}}\,\frac{f + 6\mathscr{P}}{1 + \mathscr{P}}\right)_1 - \frac{\Delta Q}{P_1^{xx} V_1} \xrightarrow[(P_1^{xx} \to P_1)]{(\Delta Q \to 0)} 1 + f_1 + \frac{6 - f_1}{1 + 1/\mathscr{P}_1} \begin{cases} \to 7 : \mathscr{P}_1 \to \infty, \\ \to f_1 + 1 : \mathscr{P}_1 \to 0 \end{cases} \qquad (1')$$

— если в итоге устанавливается адиабатический скачок (а.с.), который приводит к механически равновесному состоянию «1», причем допустима неравновесность и иной состав состояния «0».

Поскольку скорость u стационарного течения подчиняется уравнениям

$$\text{const} \equiv P^{xx} + V(u/V)^2; \qquad dP^{xx}/dV = \Delta P^{xx}/\Delta V, \qquad (3)$$

то для непрерывной эволюции параметров среды в скачке получаем уравнение Ирншоу (D — скорость скачка в системе $u_0 = 0$):

$$\Pi \equiv P + V(u/V)^2; \quad dV/dP = \Delta V/\Delta P = -(V/u)^2 = -(V_0/D)^2, \qquad (3')$$

— если непрерывная диссипация в структуре скачка обусловлена только теплообменом, т. е. $T\,dS = dQ$, откуда $P^{xx} = P$ вне разрывов и $(Q - Q_0)_{\text{а.с.}} \geqslant 0$, ибо (см. ([5])) единственным экстремумом энтропии среды (2) на «прямой Иршоу» (3′) может быть только максимум, соответствующий единственному экстремуму $(Q-Q_0)_{\max}$. В случае чистой теплопроводности ($\Pr = 0$ и т. п.) температура в структуре а.с. нарастает монотонно: $dQ = T\,dS = (V/u)(d/dx)\chi dT/dx$, откуда $dT/dx = (Q-Q_0)D/(V_0\chi) \geqslant 0$ вне разрывов. Следовательно, знак производной $dP/dx = (dP/dT)_{\text{И}}(dT/dx)$ определяется выражением $(dP/dT)_{\text{И}} = (D/V_0)^2(Nk+S_{\text{р}})/(\Pi - 2P_{\text{в}} + P_{\text{р}})$, знак которого меняется, если $P(T_{\max}) < P_1$, т. е. однозначность параметров течения нарушается при $\mathscr{P}_1 < (V_0/V_1) - 2 + (P_0/P_{\text{в}1})$ [2, 6]. Для $dP/dx < 0$ непрерывная эволюция $P \rightarrow P_1$ соответствует «перехлесту» с трехзначностью гидродинамических параметров (кроме T).

Однозначность параметров течения в скачке достигается введением и.т.с.-разрыва, при переходе через который должно, очевидно, соблюдаться условие $T(S^+ - S^-) \geqslant Q^+ - Q^-$, согласно II закону термодинамики.

Для любого стационарного скачка, разделяющего равновесные состояния «—» и «+» с одинаковой температурой, имеем, с учетом (1), (2),

$$\mathscr{X} \equiv V^-/V^+ = P_{\text{в}}^+/P_{\text{в}}^- = E_{\text{р}}^-/E_{\text{р}}^+ = \mathscr{P}^-/\mathscr{P}^+ = q \pm (q^2+1)^{1/2}, \tag{4}$$
$$T(S_{\text{р}}^+ - S_{\text{р}}^-) = Q_{\text{р}}^+ - Q_{\text{р}}^-; \quad S_{\text{в}}^+ - S_{\text{в}}^- = -Nk\ln\frac{V^-}{V^+};$$
$$Q_{\text{в}}^+ - Q_{\text{в}}^- = \frac{NkT}{2}\left(\frac{V^+}{V^-} - \frac{V^-}{V^+}\right) \equiv qNkT,$$

откуда, очевидно, следует

$$\int_-^+ (T\,dS - dQ) = \int_-^+ (T\,dS_{\text{в}} - dQ_{\text{в}}) = \frac{NkT}{2}\left(\mathscr{X} - \frac{1}{\mathscr{X}} - 2\ln\mathscr{X}\right) =$$
$$= \begin{cases} <0, & \mathscr{X} < 1, \\ \approx \dfrac{NkT}{6}(\mathscr{X}-1)^3, & |\mathscr{X}-1| \ll 1, \\ >0, & \mathscr{X} > 1. \end{cases} \tag{5}$$

Таким образом, стационарный и.т.с. разрежения, повышающий энтропию течения, запрещен [3, 7], а и.т.с. уплотнения необратим — за счет игнорированных механизмов диссипации, например, вязкости, которая дает $P^{xx} > P$ при непрерывном сжатии:

$$0 \leqslant T\,dS_{\text{вязк}} = (P - P^{xx})\,dV = \eta\,\frac{D}{V_0}\left(\frac{dV}{dx}\right)^2 dx.$$

И.т.с.-разрыв можно считать вырожденным случаем ($\eta \to 0$, $\Pr \to 0\ldots$) вязкого или иного скачка, от непрерывной структуры которого остались значения параметров среды в точке разрыва. В «точечной» модели структуры скачка* (и.т.с, а.с. или др.) значение функций на разрыве (в $x = 0$) можно определить при помощи дельта-функции:

$$0 < \int_-^+ (T\,dS - dQ) = \int_-^+ (P - P^{xx})\,dV \equiv \int_-^+ (P - P^{xx})\,\Delta V\delta(x)\,dx \equiv$$
$$\equiv \Delta V\{P(0) - P^{xx}(0)\}, \tag{6}$$

т. е. при сжатии (ср. (5)) получаем $P^{xx}(0) > P(0)$, как и в непрерывной структуре скачка уплотнения, причем (см. (1), (3)) $P^{xx}(0) = (P^+ + P^-)/2$, $V(0) = (V^+ + V^-)/2$, $T(0) \neq T_\pm$ (ср. fig. 5 в [8]).

В силу (5) диссипативной компонентой оказывается вещество, а вклад радиации в изменение энтропии на разрыве ограничивается изотермиче-

* За обсуждение задачи о «точечной» структуре гидродинамических разрывов автор признателен Р. Куранту, П. Лаксу, О. М. Белоцерковскому и А. Н. Колмогорову.

ским теплообменом. Внутри структуры а.с. разрыв и.т.с. переводит среду из промежуточного состояния «—» с конечной температурой $T_- = T_1$ в конечное состояние «1» (вместо «+» в (4)), т. е. эта структура подразделяется на «зону прогрева» и и.т.с.: $0 \equiv \Delta Q = (Q^- - Q_0) + (Q_1 - Q^-)$. Соответствующими подстановками из (1), (1′), (4) получаем уравнение, описывающее влияние радиации на амплитуду и.т.с. в структуре сильного а.с. (здесь обозначено $\mathscr{P}_1 \equiv \mathscr{P}$ при $f^- = f_1 \equiv f$) : $[(\mathscr{P}+1)^2\mathscr{X} - (6\mathscr{P} + f)][\mathscr{X} - 1] = 0$, т. е.

$$\mathscr{X}' = 1; \quad \mathscr{X}'' = \frac{f + 6\mathscr{P}}{(1+\mathscr{P})^2} \begin{cases} \geqslant 1, & 2 + \sqrt{3+f} \geqslant \mathscr{P} \geqslant 2 - \sqrt{3+f}, \\ \approx 0, & \mathscr{P} \gg \sqrt{f}. \end{cases} \tag{7}$$

Искомая амплитуда соответствует первому корню и непрерывной структуре а.с. при «нефизичных» значениях $\mathscr{X}'' < 1$, означающих и.т.с.

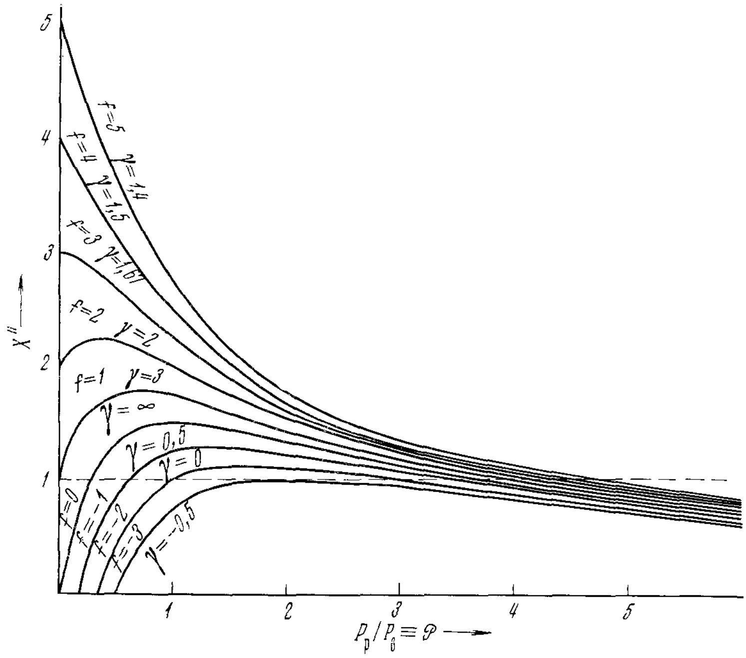

Рис. 1. Свойства физического корня уравнения (7). Расстояния между кривыми не зависят от f: $\mathscr{X}''(\mathscr{P}, f + C) - \mathscr{X}''(\mathscr{P}, f) = C / (1+\mathscr{P})^2 \neq F(f)$

разрежения. При $\mathscr{X}'' > 1$ первый корень соответствует, очевидно, непрерывной структуре а.с. с перехлестом и поэтому отбрасывается. Эффектом, не отмеченным в работах ([2], [4], [8] и др.) является рост амплитуды и.т.с. от $\mathscr{X} = f$ до $\mathscr{X}_{\max} = 9 / (6 - f)$ при возрастании радиации в диапазоне $0 \leqslant \mathscr{P} \leqslant 1 - f / 3$. Этот эффект проявляется при $-3 < f < 3$, $-{}^1/_2 < \gamma < 1$; $1{,}67 < \gamma < \infty$, где случаи $f = 1$ и 2 возможны для идеально проводящей замагниченной среды. Усиление радиации до $\mathscr{P} = (6 / f) - 2$ снижает амплитуду и.т.с. до безрадиационного уровня $\mathscr{X} = f$. При $\mathscr{P}_* \equiv 2 + (3 + f)^{1/2}$ и.т.с. исчезает (знак минус перед корнем в приближении сильных а.с. имел бы смысл только для $f \leqslant 1$) (см. рис. 1).

Исчезновение и появление и.т.с.— следствие особенностей уравнения состояния, но не особенностей переноса тепла; учет последних ограничивается критериями $\mathrm{Pr} = 0$ и т. п. Поэтому и.т.с. не может быть сглажен теплопередачей (ср. ([9])). В специфичном случае $f = 1$, $\gamma = 3$ уже сколь угодно малый вклад радиации приводит к возникновению и.т.с., который в таком газе без радиации существовать не может. Радиационная добавка повышает сжимаемость такой среды и приводит к появлению и.т.с. в следующем диапазоне: $0 < \mathscr{P} < 4$; $0 < (E_р / E_в)_1 < 24$; $2 < V_0 / V_1 < 6$ при $\mathscr{X}_{max} = 1{,}8$. В средах с $f \gg 1$ исчезновение и.т.с. наступает при доминирующем давлении радиации: $\mathscr{P}^* \approx \sqrt{f}$, но при ничтожном ее вкладе в тепловую энергию: $(E_р / E_в)_1 = 6\mathscr{P}^* / f \approx 6 / f^{1/2}$.

Условию исчезновения и.т.с. можно также придать вид $T_1 \geqslant (c\hbar / (k\pi^{2/3})[45(N/V_0)\mathscr{P}_*(2+\mathscr{P}_*)]^{1/3}$, а также $D[см/сек] \geqslant (2+\mathscr{P}_*)^{7/6}[5\mathscr{P}_* / (\pi/3)^2]^{1/6}[(\hbar/(mc)) / (V/N_0)^{1/3}]^2 \approx 6\cdot 10^8$ ρ_0 г/см^3 $\mu^{-2/3}$ г/моль. Амплитуда сжатия и.т.с. не может превысить значения (см. (7)), равного в равнораспределительном приближении числу f степеней свободы молекул вещества среды, если $f \geqslant 3$; для $f < 3$ сжатие ограничено неравенствами $f < \mathscr{X}_{max} < 3$. Тем не менее, некоторые авторы ([10], [11] и др.) рассматривают сильную изотермическую ударную волну: $P^+ \gg P^-$, откуда $P_в{}^+ \gg P_в{}^-$, т. е. $V^- / V^+ \equiv \mathscr{X}_{и.т.с.} \gg 1$ (при умеренных f) — в противоречии с решением (7) (заметим, что идея изотермического разрыва была предложена еще Стоксом — см. ([1])).

Решение указанного парадокса сводится, по-видимому, к тому, что столь сильные и.т.с. могут возникать только при нестационарной эволюции состояния среды в процессе ударного перехода, в итоге адиабатического. Такую эволюцию можно ожидать внутри а.с. с нестационарной «зоной прогрева» при наложении вторичного нестационарного отвода тепла в более холодную зону за скачком и т. п. В подобных случаях соотношения (3) и (7) теряют силу, хотя течение в окрестности и.т.с. может быть достаточно близким к стационарному. Для задачи, описанной в ([10]), существенна цилиндричность, поскольку «зона прогрева» становится сравнимой с радиусом кривизны ударного фронта.

Отвод тепла при аномальной изотермической сжимаемости соответствует $Q_р / Q_в = 8\mathscr{P}^- / (1+\mathscr{X}) \approx 8\mathscr{P}^+$; $Q_р + Q_в \approx -T(\mathscr{X} + 8\mathscr{P}^-)\cdot(Nk/2)$, т. е. отдача тепла радиацией преобладает при $T > \sqrt[3]{(N/V)^-(k/(8C))\mathscr{X}}$.

Автор выражает признательность В. С. Имшеннику за ценные замечания и интерес к работе.

Поступило
17 V 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Baron Rayleigh, Scientific Papers, Art. 346 (1910), Cambride, 1912; W. Hayes, Gasdynamic Discontinuities, Princeton Univ. Press, 1960. [2] В. А. Белоконь, ЖЭТФ, **36**, 1, 341 (1959). [3] В. А. Белоконь, Тр. МФТИ, в. 9, 15 (1962). [4] В. С. Имшенник, ЖЭТФ, **42**, 1, 236 (1962). [5] В. С. Имшенник, Астрон. журн., 39, 3, 545 (1962). [6] В. А. Белоконь, Тр. МФТИ, в. 2, 92 (1958). [7] В. А. Белоконь, Феноменологическая и статистическая термодинамика ударных волн, препринт Инст. прикл. матем. АН СССР, М., 1967; Кандидатская диссертация, ИПМ 1967. [8] Я. Б. Зельдович, Ю. П. Райзер, Ann. Rev. of Fluid Mechanics, **1**, 382 (1970). [9] H. Sen, A. Guess, Physical Rev., **108**, 3, 560 (1957); Сборн. Космическая газодинамика, ИЛ, 1960, стр. 342. [10] Е. И. Забабахин, УФН, **85**, 4, 722 (1965); Сборн. Механика в СССР за 50 лет, 2, М., 1970, стр. 313. [11] Э. К. Грасберг, В. С. Имшенник, Д. К. Надежин, Astrophys. and Space Science, **10**, 3 (1971).