Доклады Академии наук СССР
1972. Том 204, № 2

УДК 517.944.3 *МАТЕМАТИКА*

В. А. КОНДРАТЬЕВ, С. Д. ЭЙДЕЛЬМАН, Т. Г. ПЛЕТНЕВА

О ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ РЕШЕНИЯХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ В ОКРЕСТНОСТИ ГЛАДКОЙ НЕХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЙ ГИПЕРПОВЕРХНОСТИ

(Представлено академиком И. Г. Петровским 11 XI 1971)

Здесь будут изучаться слабые положительные решения произвольного уравнения вида

$$Pu \equiv \sum_{|k|\leqslant m} (-1)^k D_x^k (a_k(x)\, u(x)) = f(x) \tag{1}$$

и установлен факт (основной результат) их суммируемости, при суммируемости $f(x)$, в любой подобласти G области Ω, примыкающей к гладкой нехарактеристической гиперповерхности $\varphi(x) = 0$. В частности, для равномерно эллиптических уравнений отсюда выводится суммируемость слабых положительных решений по произвольной ограниченной области с гладкой границей.

Если поверхность $\varphi(x) = 0$ характеристическая, то возможны все варианты. Так, для уравнения

$$\partial^2 u/\partial x_1^2 + \partial^4 u/\partial x_2^4 = f(x_1, x_2)$$

основной результат имеет место по обе стороны от характеристики $x_1 = c$ ([2]), для уравнения теплопроводности

$$\partial u/\partial x_1 = \partial^2 u/\partial x_2^2 + f(x_1 x_2)$$

основной результат имеет место в области, примыкающей к характеристике $x_1 = c$ сверху, но у однородного уравнения есть положительное решение $(c - x_1)^{-1/2} \exp\{{}^1/_4 x_2^2 / (c - x_1)\}$ при $x_1 < c$ с несуммируемой нестепенной особенностью; наконец, у уравнения колебания струны

$$\partial^2 u/\partial x_1^2 = \partial^2 u/\partial x_2^2$$

есть как угодно плохие положительные решения в областях, примыкающих к характеристикам $x_1 - x_2 = c$ с любой стороны. Поэтому естественно стремиться выделить классы уравнений, для которых в областях, примыкающих к характеристической гиперплоскости, справедлив основной результат. Широкие классы таких уравнений с характеристической гиперплоскостью, так называемые эволюционные квазиэллиптические уравнения, были определены и изучены в наших работах ([1], [2]).

Если отказаться от гладкости граничной гиперповерхности, то появляются положительные решения с несуммируемыми особенностями. Для иллюстрации мы приводим некоторые результаты изучения положительных решений эллиптических уравнений второго порядка в областях с кусочно-гладкой границей.

Настоящая работа возникла при обсуждении результатов, изложенных в ([2], [3]). Применяемые здесь методы развиты нами в работах ([1-3]). Технически новым является использование специальных допустимых пробных функций (д.п.ф.) в пологих усеченных пирамидах.

1. Условия. Определения. Изложим необходимые для формулировки результатов условия.

A_1) $a_k(x)$ — комплекснозначные, равномерно ограниченные в Ω функции, при $|k| = m$ $a_k(x)$ непрерывны;

B_1) $\varphi(x)$ имеет m равномерно непрерывных, ограниченных производных, $\operatorname{grad}\varphi(x) \neq 0$;

B_2) $P_0(x; \operatorname{grad}\varphi) \equiv \sum\limits_{|k|=m} a_k(x)(\operatorname{grad}\varphi(x))^k \neq 0.$

Нами рассматриваются слабые решения уравнения (1) в Ω, т. е. измеримые функции $u(x)$, удовлетворяющие интегральному тождеству

$$\iint\limits_{\Omega_1} u(x)\, P^*\Phi(x)\, dx \equiv \iint\limits_{\Omega_1} u(x) \sum_{|k|\leqslant m} a_k(x)\, D_x^k \Phi(x)\, dx = \iint\limits_{\Omega_1} f(x)\,\Phi(x)\, dx, \tag{2}$$

где $\Phi(x)$ — любая пробная функция, т. е. функция, имеющая непрерывные производные до порядка m в Ω_1, $\overline{\Omega}_1 \subset \Omega$, обращающиеся в нуль вместе со всеми своими производными до порядка $m-1$ на $\partial\Omega_1$ (Ω_1 для разных Φ разные). Заметим, что если в качестве $\Phi(x)$ допускать функции, у которых m-я производная становится на $\partial\Omega_1$ неограниченной, то мы дополнительно будем предполагать непрерывность рассматриваемых слабых решений.

Обозначим через $K \equiv K_{\varphi_1}$ сектор комплексной ζ-плоскости $K \equiv K_{\varphi_1} = \{\zeta; |\arg\zeta| < \varphi_1 < {}^1/_2\pi$; пусть $u^+(x)$ — положительная (по конусу K (1)—(3)) часть функции $u(x)$; $u(x) = u^+(x) - u^-(x)$. Пусть G — подобласть Ω, $\overline{G} \subset \Omega$; обозначим через S часть границы G, лежащей на гиперповерхности $\varphi(x) = 0$. Введем пространство $L_1^{(t)}(G)$ функций $u(x)$, суммируемых по G с весом $\rho(x)^t$, где $\rho(x)$ — расстояние от точки $x \in G$ до S с нормой

$$\|u\|_{G;t} = \iint\limits_G \rho(x)^t\, |u(x)|\, dx.$$

2. Основной результат. Теорема 1. *Выполнены условия* A_1, B_1, B_2. *Пусть* $u(x)$ — *слабое решение уравнения* (1) *в* Ω. *Если* $\|u^-(x)\|_{\Omega;\,\gamma-m} < +\infty$, $\|f\|_{\Omega;\,\gamma} < +\infty$, γ — *любое число, большее* $m-1$, *при* $\gamma \in (m-1, m)$ *дополнительно предполагается непрерывность* $u(x)$ *в* Ω, *то* $u(x)$ *суммируемо по любой подобласти* G *области* Ω *с весом* $\rho(x)^{\gamma-m}$ *и существуют такие положительные* λ *и* h, *не зависящие от* $u(x)$, *что*

$$\begin{gathered}\|u\|_{G;\gamma-m} \leqslant \lambda\left(\|u\|_{G_1^h;0} + \|u^-\|_{G_1;\gamma-m} + \|f\|_{G_1;\gamma}\right),\\ G \subset G_1 \subset \Omega; \quad G_1^h = G_1 \cap \{\rho(x) > h\}.\end{gathered} \tag{3}$$

Доказательство теоремы 1 проводится с помощью методов работ [1-3]. Во-первых, задача локализуется: рассматривается малая окрестность, примыкающая к гиперповерхности $\varphi(x) = 0$. Затем проводится спрямление границы и решается модельная задача в локальных координатах $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ для области, примыкающей к гиперплоскости $\xi_n = 0$. В новых координатах оператор P^* записывается в виде

$$P^* \equiv \tilde{P}^*(\xi; D_\xi) = \tilde{a}_{0\ldots 0m}(\xi)\frac{\partial^m}{\partial\xi_n^m} + T_0^*(\xi, D_\xi) + P_1^*(\xi; D_\xi),$$

где $P_1^*(\xi; D_\xi)$ содержит производные порядков не выше $m-1$. Из того, что поверхность $\varphi(x) = 0$ не характеристическая, следует, что $\tilde{a}_{0\ldots 0m}(0) \neq 0$.

Решающим шагом является построение допустимой функции $\Phi_\gamma(\xi)$ в области, примыкающей к гиперплоскости $\xi_n = 0$, для которой $\operatorname{Re}\{P^*\Phi_\gamma\zeta\} \geqslant \delta|\zeta|$, $\zeta \in K$ (в примыкающей к гиперплоскости $\xi_n = 0$ подобласти). Все остальное делается стандартным путем.

В пологой усеченной пирамиде $V_{R,h} = \{\xi;\ |\xi_j| < R + \xi_n / \eta_0,\ j = 1, 2, \ldots, n-1,\ 0 < \xi_n < h\}$ малых размеров (R и h достаточно малы) рассмотрим пробную функцию $\Phi_\gamma(\xi) = b\xi_n^\gamma \prod_{j=1}^{n} (\alpha_j(\xi)\beta_j(\xi))^m \theta(\xi_n)$, $\theta(\xi_n)$ — срезывающая функция, $\theta(\xi_n) = 1$ при $\xi_n \in (0, {}^1/_3 h)$, $\theta(\xi_n) = 0$ при $\xi_n \geqslant {}^2/_3 h$; $b = \exp\{-i \arg \tilde{a}_{0\ldots 0m}(0)\}$, $\alpha_j(\xi) = \xi_n - \eta_0(\xi_j - R)$, $\beta_j(\xi) = \xi_n + \eta_0(\xi_j + R)$.

Считая $\xi_n \in (0, {}^1/_3 h)$, изучим

$$\operatorname{Re}(P^*\Phi_\gamma\zeta) \geqslant |\tilde{a}_{0\ldots 0m}(0)| \operatorname{Re} \zeta \frac{\partial^m}{\partial \xi_n^m} \Big[\xi_n^\gamma \prod_{j=1}^{n-1} (\alpha_j(\xi)\beta_j(\xi))^m \Big] -$$

$$- \left\{ |\tilde{a}_{0\ldots 0m}(\xi) - \tilde{a}_{0\ldots 0m}(0)| \left| \frac{\partial^m}{\partial \xi_n^m} \Phi_\gamma \right| + |T_0^* \Phi_\gamma| + |P_1^* \Phi_\gamma| \right\} |\zeta|.$$

Вначале выбираем малым η_0 и фиксируем его, затем малыми R и h, используем непрерывность $\tilde{a}_{0\ldots 0m}(\xi)$ в точке $\xi = 0$, приходим к требуемым неравенствам $\operatorname{Re}(P^*\Phi_\gamma\zeta) \geqslant 0$ в $V_{R,{}^1/_3 h}$, а $V_{R_1,{}^1/_3 h}$ при $R_1 < R$ $\operatorname{Re}(P^*\Phi_\gamma\zeta) \geqslant \delta(R - R_1)\xi_n^{\gamma-m}\ |\zeta|$, $\delta(R - R_1) > 0$.

Замечание. Если коэффициенты $a_k(x)$ с $|k| = m$ вещественны, то можно отказаться от непрерывности $a_k(x)$, требуя лишь их ограниченность.

3. Эллиптические уравнения. Из теоремы 1 и теоремы о трех шарах ([1]) следует такое предложение.

Теорема 2. *Ω — ограниченная область R^n с границей S, принадлежащей классу C^m. Выполнено условие A_1 и A_2: $P_0(x; \sigma)$ равномерно эллиптический многочлен. Пусть $u(x)$ — слабое решение уравнения (1) в Ω. Если $\|u^-\|_{\Omega;\, \gamma-m} < +\infty$, $\|f\|_{\Omega;\, \gamma} < +\infty$, γ — любое число, большее $m-1$, при $\gamma \in (m-1, m)$ дополнительно предполагается непрерывность $u(x)$ в Ω, то $u(x)$ суммируемо по области Ω с весом $\rho(x)^{\gamma-m}$ и для любой подобласти Ω_1 области Ω найдется положительная постоянная $\lambda_1 = \lambda_1(\rho(\partial\Omega_1, \partial\Omega))$ такая, что*

$$\|u\|_{\Omega;\, \gamma-m} \leqslant \lambda_1(\|u\|_{\Omega_1;\, 0} + \|u^-\|_{\Omega;\, \gamma-m} + \|f\|_{\Omega;\, \gamma}).$$

4. Эллиптические уравнения второго порядка. Случай кусочно-гладкой граничной поверхности. Очевидно, что основной результат может не иметь места для положительных решений в окрестности нехарактеристической негладкой гиперповерхности. Так, функция $u_\lambda(x_1, x_2) = r^{-\lambda} \sin \lambda\varphi$, (r, φ) — полярные координаты точки (x_1, x_2), положительна, гармонична в области $G_{\pi/\lambda} = \{(x_1, x_2);\ r \in (0, \infty),\ \varphi \in (0, \pi/\lambda)\}$; при $\lambda \geqslant 2$ $u_\lambda(x_1, x_2)$ не суммируема по $G_{\pi/\lambda}$. Функция $u(x_1, x_2) = \operatorname{Re} e^{1/z}$, $z = x_1 + ix_2$,— положительная гармоническая в «клюве» $G = \{(x_1, x_2);\ |x_2(x_1^2 + x_2^2)| < {}^1/_2\pi\}$ функция с нестепенной особенностью в начале координат.

Для иллюстрации приведем теорему о положительных решениях уравнения

$$\Delta u + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}(a_i(x)u) + a_0(x)u = f(x) \tag{4}$$

в случае модельной области $G_{\omega,R} = \{x;\ r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} < R;$

$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{x_2}{x_1} < \omega;\ |x_j| < R,\ j = 2, \ldots, n\}\ G_{\omega,R}^h = G_{\omega,R} \cap \{r > h\}.$$

Введем пространство $L_{1;\,a,\,b}(G)$ функций, суммируемых по G с весом $r^a \sin^b \frac{\pi}{\omega} \varphi$ и нормой

$$\{u\}_{G;a,b} = \iint_G r^a \sin^b \frac{\pi}{\omega} \varphi\, |u(x)|\, dx.$$

Теорема 3. *Выполнено условие* A_1 *в* $G_{\omega,R}$. *Если* $u(x)$ — *слабое непрерывное решение уравнения* (4) *в* $G_{\omega,R}$, *для которого* $\{u^-\}_{G_{\omega,R};\,a-2,\,b-2}<+\infty$, $\{f\}_{G_{\omega,R};a,b}<+\infty$, $a=\frac{\pi}{\omega}+\varepsilon_1$, $b=1+\varepsilon_2$, $\varepsilon_1<0$, $\varepsilon_2>0$, $1+\frac{\omega}{\pi}\varepsilon_1>\sqrt{1+\varepsilon_2}$, *то* $u(x)$ *суммируемо с весом* $r^{a-2}\sin^{b-2}\frac{\pi}{\omega}\varphi$ *по любой области* G_{ω,R_1} *и для любых* $h>0$, $R_2<R_1$ *существует положительное число* $\lambda=\lambda(h,R_1,R_2)$ *такое, что*

$$\{u\}_{G_{\omega,R_1};a-2,\,b-2}\leqslant\lambda\left(\{u\}_{G^h_{\omega,R_2};\,0,0}-\{u^-\}_{G_{\omega,R};\,a-2,b-2}+\{f\}_{G_{\omega,R};\,a,b}\right).$$

Аналогично рассматривается случай, когда в (4) вместо Δu стоит $\sum\limits_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}(a_{ij}(x)u)$; $a_{ij}(x)$ непрерывны; $\sum\limits_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x)\sigma_i\sigma_j$ — равномерно эллиптический многочлен.

Поступило
8 VI 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. А. Кондратьев, С. Д. Эйдельман, ДАН, **184**, № 5 (1969); **189**, № 3 (1969), Матем. сборн., **81** (123), 3 (1970). [2] Т. Г. Плетнева, С. Д. Эйдельман, ДАН, **192**, № 3 (1970). [3] Т. Г. Плетнева, С. Д. Эйдельман, ДАН, **193**, № 4 (1970).