Доклады Академии наук СССР
1972. Том 203, № 6

УДК 517.11

МАТЕМАТИКА

М. И. КАНОВИЧ

СЛОЖНОСТЬ ОГРАНИЧЕННОГО РАЗРЕШЕНИЯ ПОЛУПЕРЕЧИСЛИМЫХ МНОЖЕСТВ

(Представлено академиком П. С. Новиковым 14 X 1971)

В заметке рассматриваются вопросы, связанные с оценками сложности ограниченного разрешения множеств некоторых типов.

1. Мы предполагаем, что имеется некоторый логико-арифметический язык. Под множеством понимается формула этого языка в одной переменной (допустимыми значениями переменной являются натуральные числа) (см. ([1])).

2. Пусть $\mathfrak{M}$ — множество, n — натуральное число. Ф-алгорифм $\mathfrak{A}$ называется $(\mathfrak{M}, n)$-разрешающим, если он применим к любому натуральному числу, не превосходящему n, и для всякого такого числа x

$$\mathfrak{A}(x) \simeq \Lambda \equiv x \in \mathfrak{M}$$

(см. ([2, 3])).

Функцию h назовем верхней оценкой сложности разрешения множества $\mathfrak{M}$, если для всякого натурального числа n квазиосуществим $(\mathfrak{M}, n)$-разрешающий Ф-алгорифм сложности* не выше чем $h(n)$.

Функцию g назовем нижней оценкой сложности разрешения множества $\mathfrak{M}$, если, каково бы ни было n, сложность любого $(\mathfrak{M}, n)$-разрешающего Ф-алгорифма не меньше чем $g(n)$.

Нетрудно видеть, что, каково бы ни было множество $\mathfrak{M}$, осуществима линейная верхняя оценка сложности его разрешения. Имеются множества с линейной нижней оценкой сложности разрешения. Я. М. Бардзинь ([4]) и Н. В. Петри ([5]) показали, что для перечислимых множеств верхнюю оценку сложности разрешения можно понизить до логарифмической функции. Оказывается, что подобный эффект имеет место для существенно более широкого класса множеств.

3. Частичнорекурсивную функцию двух переменных φ назовем функцией выбора для множества $\mathfrak{M}$, если для любых натуральных чисел n и m

1) $!\varphi(n, m) \supset \varphi(n, m) = n \vee \varphi(n, m) = m$,

2) $n \in \mathfrak{M} \vee m \in \mathfrak{M} \supset !\varphi(n, m) \& \varphi(n, m) \in \mathfrak{M}$.

Множество $\mathfrak{M}$ назовем полуперечислимым, если осуществима частично рекурсивная функция, являющаяся функцией выбора для множества $\mathfrak{M}$.

Множество $\mathfrak{M}$ называется полурекурсивным, если осуществима общерекурсивная функция, являющаяся функцией выбора для множества $\mathfrak{M}$ (см. ([6])).

Множество $\mathfrak{M}$ называется регрессивным, если осуществимы частичнорекурсивная функция f и натуральное число a такие, что

1) $f(a) = a \& a \in \mathfrak{M}$,

2) $\forall x\, (x \in \mathfrak{M} \supset !f(x) \& f(x) \in \mathfrak{M})$,

3) $\forall xy\, (x, y \in \mathfrak{M} \setminus \{a\} \& x \neq y \supset f(x) \neq f(y))$,

* Под сложностью алгорифма понимается длина его изображения (см. ([2])).

4) $\forall x (x \in \mathfrak{M} \supset \exists m \quad f^{(m)}(x) = a)$, где $f^{(m)}(x) \rightleftharpoons \underbrace{f(f)\ldots(f)}_{m \text{ раз}} x))\ldots))$

(см. [9]).

Некоторое представление о полуперечислимых множествах можно получить из следующего предложения.

Теорема 1. 1) *Всякое регрессивное множество полуперечислимо (следовательно, всякое перечислимое множество полуперечислимо).*

2) *Осуществимо полуперечислимое множество, не являющееся регрессивным (и, следовательно, не являющееся перечислимым).*

3) *Множество $\mathfrak{M}$ полурекурсивно тогда и только тогда, когда полуперечислимы само $\mathfrak{M}$ и дополнение $\mathfrak{M}$.*

4) *Осуществимо полуперечислимое множество, не являющееся полурекурсивным.*

4. Для полуперечислимых множеств имеется логарифмическая верхняя оценка сложности разрешения.

Теорема 2. *Пусть $\mathfrak{M}$ — полуперечислимое множество. Можно указать такое натуральное число c, что функция h, определяемая равенством*

$$h(n) = [\log_2(n+1)] + c,$$

является верхней оценкой сложности разрешения множества $\mathfrak{M}$.

Согласно [4] осуществимо перечислимое (следовательно, и полуперечислимое) множество с логарифмической нижней оценкой сложности своего разрешения.

5. Для полурекурсивных множеств согласно теореме 2 имеется логарифмическая верхняя оценка сложности разрешения. Более низкая оценка невозможна.

Теорема 3. *Осуществимо полурекурсивное перечислимое множество $\mathfrak{M}$ такое, что при некотором c функция g, определяемая равенством*

$$g(n) = \left[\frac{\log_2(n+1)}{10}\right] \dot{-} c,$$

является нижней оценкой сложности разрешения множества $\mathfrak{M}$.

6. Пусть $R(x, y)$ — разрешимый предикат. Множество, определяемое формулой $\exists y\, R(x, y)$ будем называть множеством типа $\exists$. Аналогично определяются множества типа $\forall$, $\forall\exists$, $\neg\neg\exists\forall$ и т. д. (см. [7]).

7. Для регрессивных множеств имеем следующие утверждения.

Теорема 4. 1) *Осуществимо регрессивное множество типа $\exists$ с логарифмической нижней оценкой сложности своего разрешения.*

2) *Для всякого регрессивного множества типа $\forall$ невозможна неограниченная общерекурсивная нижняя оценка сложности разрешения.*

Часть 1) теоремы 4 следует из [4], часть 2 — из [8].

8. Частным случаем регрессивных множеств являются ретрассируемые множества.

Множество $\mathfrak{M}$ называется ретрассируемым, если осуществимы частичнорекурсивная функция f и число a такие, что выполняются пункты 1)—4) из определения регрессивного множества и

5) $\forall x\, (x \in \mathfrak{M} \setminus \{a\} \supset f(x) < x)$ (см. [10]).

Теорема 5. 1) *Для всякого ретрассируемого множества типа $\exists$ или типа $\forall$ невозможна неограниченная общерекурсивная нижняя оценка сложности разрешения.*

2) *Осуществимо ретрассируемое множество типа $\forall$E (имеется эквивалентное ему множество типа $\neg\neg\exists\forall$) такое, что при некотором c функция g, определяемая равенством*

$$g(n) = \left[\frac{\log_2(n+1)}{10}\right] \dot{-} c,$$

является нижней оценкой сложности его разрешения.

Утверждение 1) теоремы 5 следует из ([8]).

Автор выражает глубокую благодарность А. А. Маркову за внимание и советы.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
14 X 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Н. А. Шанин, Тр. Матем. инст. им. В. А. Стеклова АН СССР, **52**, 226 (1958). [2] А. А. Марков, Изв. АН СССР, сер. матем., **31**, 161 (1967). [3] М. И. Канович, ДАН, **194**, № 4, 721 (1970). [4] Я. М. Барздинь, ДАН, **182**, № 6, 1249 (1968). [5] Н. В. Петри, **185**, № 1, 37 (1969). [6] C. G. Fockusch jr., Trans. Am. Math. Soc., **131**, № 2, 420 (1968). [7] С. К. Клини, Введение в метаматематику, М., 1957. [8] М. И. Канович, ДАН, **194**, № 3, 500 (1970). [9] J. C. E. Dekker, Proc. Symp. Pure Math., **5**, 77 (1962). [10] J. C. E. Dekker, J. R. Myhill, Canad. J. Math., **10**, 357 (1958).