Доклады Академии наук СССР
1972. Том 204, № 2

УДК 517.925.12 **МАТЕМАТИКА**

В. А. ПЛИСС

ГРУБЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ЛИНЕЙНЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

(Представлено академиком В. И. Смирновым 15 XI 1971)

Рассмотрим последовательность линейных систем дифференциальных уравнений вида

$$dx / dt = P_m(t)x, \quad m = 1, 2, \ldots, \tag{0,1}$$

где x — n-мерный вектор, $P_m(t)$ — непрерывная квадратная матрица порядка n, имеющая период ω_m:

$$P_m(t + \omega_m) = P_m(t), \quad m = 1, 2, \ldots; \tag{0,2}$$

периоды ω_m матриц $P_m(t)$ неограниченно возрастают,

$$\lim_{m\to\infty} \omega_m = \infty, \tag{0,3}$$

а сами матрицы $P_m(t)$ равномерно ограничены:

$$|P_m(t)| \leqslant H, \quad m = 1, 2, \ldots, \tag{0,4}$$

где символом $|\cdot|$ обозначается эвклидова норма соответствующей матрицы.

Будем предполагать, что все системы (0,1) имеют k отрицательных характеристических показателей и $n - k$ положительных.

Для последовательностей систем вида (0,1) в настоящей заметке формулируются условия равномерной грубости. Под этим, как и раньше ([1]), понимается следующее.

Определение. Последовательность (0,1) называется равномерно грубой, если существует такое $\varepsilon > 0$, что, какова бы ни была непрерывная матрица $R_m(t)$, имеющая период ω_m и удовлетворяющая неравенству

$$|R_m(t)| < \varepsilon, \tag{0,5}$$

система дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = (P_m(t) + R_m(t))\, x \tag{0,6}$$

не имеет нулевых характеристических показателей.

1. Обозначим через $x_m(t, t_0, \xi)$ решение системы (0,1) с начальными данными $t = t_0$, $x = \xi$.

Хорошо известно, что при сделанных предположениях каждой системе (0,1) соответствуют гиперплоскости $M_m^+(t)$ и $M_m^-(t)$ пространства x, имеющие размерности k и $n - k$ соответственно и обладающие следующими свойствами: если $\xi \in M_m^+(t_0)$, то

$$x_m(t, t_0, \xi) \to 0 \quad \text{при} \quad t \to +\infty, \tag{1,1}$$

и если $\xi \in M_m^-(t_0)$, то

$$x_m(t, t_0, \xi) \to 0 \quad \text{при} \quad t \to -\infty. \tag{1,2}$$

Гиперплоскости $M_m^+(t)$ и $M_m^-(t)$ зависят от t непрерывно и ω_m-периодически.

Обозначим через $\alpha_m(t)$ угол между $M_m^+(t)$ и $M_m^-(t)$.

Введем еще следующие обозначения. Пусть θ — произвольное число; положим

$$r_m^+(\theta, l) = \max|x_m(\theta l, \theta(l-1), \xi)|, \qquad (1,3)$$
$$l = 1, 2, \ldots, [\omega_m / \theta].$$

где $[\omega_m / \theta]$ — целая часть числа ω_m / θ, а максимум берется по всем $\xi \in M_m^+(\theta(l-1))$, $|\xi| = 1$. Положим, кроме того,

$$r_m^-(\theta, l) = \min|x_m(\theta l, \theta(l-1), \eta)|, \qquad (1.4)$$

где минимум берется по всем $\eta \in M_m^-(\theta(l-1))$, $|\eta| = 1$.

Теперь можно сформулировать условия равномерной грубости последовательности (0,1).

Теорема 1. *Для того чтобы последовательность систем* (0,1) *была равномерно грубой, необходимо и достаточно выполнения следующих условий:*

I) *существует такое $a > 0$, что*

$$\alpha_m(t) > a \qquad (1.5)$$

при всех m, t.

II) *существуют такие положительные числа c, d, что при любых m и $s \leqslant \tau$ выполняются неравенства*

$$\frac{|x_m(\tau, s, \eta)|}{|x_m(\tau, s, \xi)|} > de^{c(\tau-s)}, \qquad (1,6)$$

если $|\xi| = |\eta| = 1$, $\xi \in M_m^+(s)$, $\eta \in M_m^-(s)$.

III) *Существуют такие числа $\lambda > 0$ и $\theta_0 > 0$, что для всякого $\theta \geqslant \theta_0$ найдется такое $m(\theta)$, что при любых $m \geqslant m(\theta)$ выполняются неравенства*

$$\sum_{l=1}^{[\omega_m/\theta]} \ln r_m^+(\theta, l) < -\lambda\omega_m, \qquad (1.7)$$

$$\sum_{l=1}^{[\omega_m/\theta]} \ln r_m^-(\theta, l) > \lambda\omega_m. \qquad (1,8)$$

2. Сформулированная теорема имеет важные приложения в теории грубых многомерных систем.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений вида

$$dy / dt = Y(y), \qquad (2,1)$$

где y, Y — n-мерные векторы. Относительно вектор-функции Y предполагается, что она непрерывно дифференцируема при всех y.

Будем предполагать, что система (2,1) удовлетворяет следующему условию грубости.

Существует такое $\varepsilon > 0$, что для всякой непрерывно дифференцируемой вектор-функции $R(y)$, удовлетворяющей неравенствам

$$|R(y)| < \varepsilon, \quad |\partial R / \partial y| < \varepsilon, \qquad (2,2)$$

где $\partial R / \partial y$ — матрица Якоби, система дифференциальных уравнений

$$dy / dt = Y(y) + R(y) \qquad (2,3)$$

не имеет периодических решений с нулевыми характеристическими показателями.

Предположим, что система (2,1) имеет бесконечную последовательность периодических решений $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t), \ldots$, лежащих в компактном множестве:

$$|\varphi_m(t)| < h, \quad m = 1, 2, \ldots \tag{2,4}$$

Пусть ω_m — наименьший период решения $\varphi_m(t)$. Из условия грубости тогда следует, что периоды ω_m удовлетворяют соотношению (0,3).

Перейдем в окрестности каждого из периодических решений $\varphi_m(t)$ к координатам Пуанкаре и линеаризуем полученные системы; тогда придем к последовательности линейных систем вида (0,1). Нетрудно видеть, что эта последовательность будет равномерно грубой, поэтому справедлива

Теорема 2. *Предположим, что система* (2,1) *имеет последовательность периодических решений* $\varphi_m(t)$, *удовлетворяющих условию* (2,4), *и система* (0,1) *есть результат линеаризации системы* (2,1) *в окрестности решения* $y = \varphi_m(t)$; *тогда последовательность систем* (0,1) *удовлетворяет условиям* I), II), III) *теоремы* 1.

Ленинградский государственный университет
им. А. А. Жданова

Поступило
13 X 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. А. Плисс, Дифференциальные уравнения, 7, № 2 (1971).