

УДК 519.4

МАТЕМАТИКА

В. А. ОСИПОВА

ОБ УРАВНЕНИЯХ С ОДНИМ НЕИЗВЕСТНЫМ В ПОЛУГРУППАХ С ОГРАНИЧЕННОЙ МЕРОЙ НАЛЕГАНИЯ ОПРЕДЕЛЯЮЩИХ СЛОВ

(Препresentовано академиком П. С. Новиковым 28 X 1971)

Пусть полугруппа Π задана образующими

$$a_1, a_2, \dots, a_n \quad (1)$$

и определяющими соотношениями $A_i = B_i$ (слова A_i и B_i непустые, $i = 1, 2, \dots, \beta$).

Через M_Π обозначим множество всех определяющих слов полугруппы Π .

Говорят, что полугруппа Π принадлежит классу K_μ с мерой налегания определяющих слов, меньшей μ , если для любых A и B из множества M_Π таких, что $A \equiv PDQ$, $B \equiv RDS$, из $\partial(D) \geq \mu \partial(A)$ следует, что $P \equiv R$, $Q \equiv S$.

В работе (1) было получено решение проблемы тождества в классе полугрупп $K_{1/3}$. Этот результат усилен в (2). В настоящей работе указывается алгоритм распознавания разрешимости систем уравнений с одним неизвестным в полугруппах этого класса.

Пусть $\Pi \in K_{1/3}$. Начало (конец) P определяющего слова A назовем правильным началом (правильным концом), если $\partial(P) \geq 2/3 \partial(A)$. Разложение

$$E \equiv S_1 \dots S_t \quad (2)$$

слова E в алфавите (1) назовем нормальным, если множители $S_1, \dots, S_t$ удовлетворяют условиям

I. Каждое S_i входит в некоторое $C_i \in M_\Pi$ и $\partial(S_i) \geq 1/3 \partial(C_i)$, $i = 1, \dots, t$.

II. Для любого i , $1 \leq i \leq t$ выполняется одно и только одно из следующих условий: или S_i есть правильный конец C_i , или S_{i+1} есть правильное начало C_{i+1} .

Всякое слово E , обладающее нормальным разложением (2), назовем нормальным. Если кроме условий I и II выполняется условие

III. S_1 есть правильное начало C_1 , S_t есть правильный конец C_t , то нормальное слово E и нормальное разложение (2) назовем замкнутым.

Пусть S_i — множитель некоторого нормального разложения (2), C_i — соответствующее ему определяющее слово и $C_i \equiv P_i S_i Q_i$. Положим $\varphi(S_i) = Q_i$, $\psi(S_i) = P_i$. Из $\Pi \in K_{1/3}$ следует однозначность функций $\varphi(S_i)$ и $\psi(S_i)$.

Будем говорить, что нормальное разложение $E \equiv T_1 \dots T_t$ есть продолжение влево разложения (2), если при некотором i , $1 \leq i < t-1$, $T_i \equiv S_i'$, $T_{i+1} \equiv S_i'' S_{i+1}$, где $S_i \equiv S_i' S_i''$, S_i'' непусто, и $T_j \equiv S_j$ при $j \neq i$, $j \neq i+1$. Легко доказать, что каждое нормальное слово имеет единственное непродолжаемое влево нормальное разложение.

Верна следующая

Лемма 1. Пусть E и G — нормальные слова, $E \equiv S_1 \dots S_t$, $G \equiv T_1 \dots T_l$ — их нормальные разложения и $E = G$ в Π .

Тогда $t = l$ и для любого $i < t$ выполнены соотношения

$$1) S_1 \dots S_i \varphi(S_i) = T_1 \dots T_i \varphi(T_i), \quad \psi(S_{i+1}) S_{i+1} \dots S_t = \psi(T_{i+1}) T_{i+1} \dots T_t;$$

2) $[\varphi(S_i) \subseteq \varphi(T_i)] \& [\psi(S_{i+1}) \subseteq \psi(T_{i+1})] \vee [\varphi(S_i) \subseteq \psi(T_{i+1})] \& [\psi(S_{i+1}) \subseteq \varphi(T_i)]$.

Вхождение $U * P * V$ замкнутого нормального слова P в слово UPV назовем продолжаемым влево (вправо), если можно указать такой непустой конец U'' слова U (такое непустое начало V' слова V), что $U''P(PV')$ — замкнутое нормальное слово. Вхождение замкнутого нормального слова назовем максимальным, если оно не продолжаемо ни влево, ни вправо.

Представим слово X в виде

$$X \subseteq U_0 P_1 U_1 P_2 \dots P_s U_s, \quad (3)$$

где $P_1, \dots, P_s$ — замкнутые нормальные слова. Представление (3) назовем нормальным представлением, если вхождения $U_0 P_1 \dots U_{i-1} * P_i * U_i \dots U_s$, $i = 1, 2, \dots, s$, максимальны и в слова U_j , $j = 0, 1, \dots, s$, не входят замкнутые нормальные слова.

Можно доказать, что для данного слова X существует единственное нормальное представление (3), и если $X = Y$ в Π , то нормальное представление Y имеет вид $Y \subseteq U_0 T_1 U_1 \dots T_s U_s$, где $T_i = P_i$ в Π , $i = 1, \dots, s$.

Пусть в нормальном представлении (3) слово U_0' есть максимальное начало U_0 , продолжаемое влево до некоторого замкнутого нормального слова V , и $V_0 \subseteq U_0' U_0''$. Пусть $V \subseteq R_1 \dots R_v$ — нормальное разложение слова V . Тогда $U_0' \subseteq R_i'' R_{i+1} \dots R_v$, где $1 \leq i \leq v$, $R_i' R_i'' \subseteq R_i$, R_i' непусто. Положим $V_0 = R_i'' R_{i+1}$, $V_1 = R_{i+2} \dots R_v$. Тогда $U_0 \subseteq V_0 V_1 U_0''$, где V_1 — нормальное слово. Слова V_0 , V_1 и U_0'' определены однозначно и не зависят от выбора продолжения V . Аналогично $U_s \subseteq U W_1 W_0$, где W_1 — соответствующим образом определенное нормальное слово.

Вхождение $V_0 * V_1 U_0' P_1 U_1 \dots U_{s-1} P_s U_s' W_1 * W_0$ в слово X назовем устойчивым. Множители разложений нормальных слов $V_1, P_1, \dots, P_s, W_1$ назовем нормальными множителями типа 1 слова X ; буквы подслов $V_0, U_0', U_1, \dots, U_{s-1}, U_s', W_0$ назовем нормальными множителями типа 2 слова X . Вхождение $R * P * Q$ слова P в слово X назовем целым, если каждый множитель типа 1 или 2 слова X целиком содержится либо в R , либо в P , либо в Q .

Лемма 2. Пусть слово X входит в Y и $Y \subseteq u X v$. Если $w_1 * Z * w_2$ — устойчивое вхождение в X , то и $w_1 * Z * w_2 v$ — целое вхождение в Y .

Пусть a — множитель типа 2 слова X , т. е. некоторая буква. Тогда положим $\varphi(a) = \varphi(a) = 1$.

Если можно указать целое вхождение $u * X * v$ слова X в устойчивую часть некоторого слова Y , то положим $\psi(X) = \psi(S_1)$, $\varphi(X) = \varphi(S_2)$, где S_1 — первый, S_2 — последний множитель разложения слова Y на множители типа 1 и 2, содержащиеся во вхождении $u * X * v$.

Будем говорить, что для пары слов X и Y выполняется условие $\varphi = \psi$, если

- 1) $X = \psi(E)E$ при некотором E влечет $Y = \psi(E)F$ при некотором F ;
- 2) $X\varphi(X) = \psi(E)E$ влечет $Y\varphi(X) = \psi(E)F$;
- 3) $X = E\varphi(E)$ влечет $Y = F\varphi(E)$;
- 4) $\psi(X)X = E\varphi(E)$ влечет $\psi(X)Y = F\varphi(E)$.

Рассмотрим систему из t уравнений

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{11}x\mathcal{A}_{12}x \dots \mathcal{A}_{1n_1} &= \mathcal{B}_{11}x\mathcal{B}_{12}x \dots \mathcal{B}_{1m_1} \\ \mathcal{A}_{21}x\mathcal{A}_{22}x \dots \mathcal{A}_{2n_2} &= \mathcal{B}_{21}x\mathcal{B}_{22}x \dots \mathcal{B}_{2m_2} \\ \mathcal{A}_{t1}x\mathcal{A}_{t2}x \dots \mathcal{A}_{tn_t} &= \mathcal{B}_{t1}x\mathcal{B}_{t2}x \dots \mathcal{B}_{tm_t} \end{aligned} \quad (4)$$

в полугруппе $\Pi \in K_{1/3}$, где $\mathcal{A}_{11}, \dots, \mathcal{A}_{1n_1}$, $\mathcal{A}_{21}, \dots, \mathcal{A}_{tn_t}$, $\mathcal{B}_{11}, \dots, \mathcal{B}_{1m_1}$, $\mathcal{B}_{21}, \dots, \mathcal{B}_{tm_t}$ — коэффициенты, x — неизвестное.

Обозначим

$$d_i = \max_j \{\partial(\mathcal{A}_{ij}), \partial(\mathcal{B}_{ij})\}, \quad i = 1, 2, \dots, t;$$

$$d = \max_{i=1, \dots, t} d_i; \quad s = \max \left(\sum_{i=1}^t n_i, \sum_{i=1}^t m_i \right), \quad g = \max_{i=1, \dots, \beta} \{ \partial(A_i), \partial(B_i) \}.$$

Лемма 3. Пусть для системы (4) $d_1 \neq 0, \dots, d_t \neq 0$. Если $x = X$ есть решение (4) и $\partial(X) > k_1$, где $k_1 = 2(14g^5)^s d$, то $m_i = n_i$, $i = 1, \dots, t$, и можно указать такую систему из s уравнений

$$\begin{aligned} P_1 y \varphi_1 &= \psi_1 y T_1, \\ P_s y \varphi_s &= \psi_s y T_s, \end{aligned} \quad (5)$$

где $\partial(P_j) < k_1$, $\partial(T_j) < k_1$, $j = 1, \dots, s$, что

1) существует решение $y = Y$ этой системы, удовлетворяющее условию $X \underline{\subseteq} uYv$, где $\partial(uv) < k_1$;

2) вхождение $u * Y * v$ есть целое вхождение в устойчивую часть X ;

3) если φ_j непусто, то $\varphi_j \underline{\subseteq} \varphi(Y)$; если ψ_j непусто, то $\psi_j \underline{\subseteq} \psi(Y)$, $j = 1, \dots, s$;

4) если $y = Y_1$ есть решение системы (5) такое, что Y и Y_1 удовлетворяют условию $\varphi - \psi$, то $x = uY_1v$ есть решение системы (4).

Лемма 4. Пусть $y = Y$ есть решение системы (5), где P_j, Q_j — непустые слова, φ_j — либо пустое слово, либо $\varphi_j \underline{\subseteq} \varphi(Y)$, ψ_j — либо пустое слово, либо $\psi_j \underline{\subseteq} \psi(Y)$, $j = 1, \dots, s$, и $\partial(Y) > k_2$, где $k_2 = 4g^3h[(gh)^s + 3gh^2]$, $h = \max_{j=1, \dots, s} \{ \partial(P_j), \partial(Q_j) \}$.

Тогда можно указать такое решение $y = Y_1$ системы (5), что Y и Y_1 удовлетворяют условию $\varphi - \psi$ и $\partial(Y_1) < k_2$.

Пусть для i -го уравнения системы (4) $d_i = 0$, т. е. уравнение бескоэффицициентное. Очевидно, при $m_i = n_i$ произвольное слово есть решение этого уравнения. Можно доказать, что при $m_i \neq n_i$ его решением является только пустое слово.

Из этого замечания и лемм 3 и 4 следует

Лемма 5. Если $x = X$ — минимальное решение системы уравнений (4), то $\partial(X) < k_1 + k_2$.

Из разрешимости проблемы тождества и леммы 5 непосредственно следует

Теорема 1. Существует алгоритм для распознавания разрешимости систем уравнений в словах с одним неизвестным для всех полугрупп из класса $K_{1/3}$.

В работе (3) по аналогии с понятием сопряженности в группе определялось понятие сопряженности в полугруппе. При этом возникают два различных понятия (сопряженность I-го и II-го рода), которые в применении к группам означают одно и то же.

Говорят, что слова X и Y сопряжены во II-ом роде в полугруппе Π , если можно указать слово Z такое, что $XZ = ZY$ в Π . Из теоремы 1 следует

Теорема 2. Существует алгоритм, решающий проблему сопряженности II-го рода для всех полугрупп из класса $K_{1/3}$.

Математический институт им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР
Москва

Поступило
14 X 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ В. А. Тартаковский, П. В. Стендер, Матем. сборн., 75, 117, № 1 (1968).
² В. А. Осипова, ДАН, 178, № 5 (1968). ³ В. А. Осипова, Конфер. педагогич. вузов по алгебре и математической логике, Иваново, 1970.