Доклады Академии наук СССР
1972. Том 203, № 4

УДК 513.83 *МАТЕМАТИКА*

В. И. КУЗЬМИНОВ, И. А. ШВЕДОВ

О ГОМОЛОГИЯХ ПРЕДЕЛА СПЕКТРА БИКОМПАКТОВ

(Представлено академиком П. С. Александровым 25 X 1971)

В этой заметке изучаются свойства непрерывности теории гомологий стинродовского типа.

Пусть $H_*(-, M)$ — теория гомологий на категории бикомпактов, для которой справедлива следующая естественная формула универсальных коэффициентов:

$$0 \to \operatorname{Ext}(\check{H}^{n+1}(X);\ M) \to H_n(X;\ M) \to \operatorname{Hom}(\check{H}^n(X),\ M) \to 0,$$

где $\check{H}^*$ — теория когомологий Александрова — Чеха с целочисленными коэффициентами.

Отметим, что теория гомологий Стинрода на категории компактов и несколько видоизмененная теория гомологий Бореля — Мура удовлетворяет этой формуле ([1], [2]).

Пусть J — произвольное направленное множество. Обозначим через $\bar{J}$ направленное множество $J \cup \infty$, в котором $\alpha < \infty$ для каждого $\alpha \in J$.

Пусть $\mathfrak{X} = \{X_\alpha, \pi_\alpha^\beta\}_{\alpha, \beta \subset J}$ — семейство бикомпактов и гомотонических классов отображений, для которого

1) если $\alpha < \beta$, то класс π_α^β не пуст $(\pi_\alpha^\beta\colon\ X_\beta \to X_\alpha)$,
2) π_α^α содержит тождественное отображение,
3) если $\alpha < \beta < \gamma$, то $\pi_\alpha^\beta \circ \pi_\beta^\gamma \sim \pi_\alpha^\gamma$.

Группы $\check{H}^*(X_\alpha)$ и $H_*(X_\alpha, M)$ образуют прямой и обратный спектры над J, которые обозначим соответственно через h^* и h_*. Положим $X = X_\infty$. Отображения π_α^∞ порождают отображения

$$\Phi^*\colon \varinjlim h^* \to \check{H}^*(X) \text{ и } \Phi_*\colon H_*(X, M) \to \varprojlim h_*.$$

Предположим, что

4) Φ^* — изоморфизм.

Систему $\mathfrak{X}$, удовлетворяющую условиям 1) — 4), образуют а) бикомпакт и нервы его открытых покрытий, б) обратный спектр бикомпактов и его предельное пространство.

В случае а) гомоморфизм Φ_* совпадает с каноническим гомоморфизмом $H_* \to \check{H}_*$.

Обозначим через $\operatorname{Pext}(A, B)$ подгруппу элементов группы $\operatorname{Ext}(A, B)$, делящихся на любое целое число. Будем называть бикомпакт X квазиполиэдром, если группа $\check{H}^*(X)$ разложима в прямую сумму циклических групп.

Теорема 1. $\operatorname{Ker}\Phi_n \cong \varprojlim^{(1)} \operatorname{Hom}(h^{n+1},\ M)$; $\operatorname{Coker}\Phi_n \cong \varprojlim^{(2)} \operatorname{Hom}(h^{n+1},\ M)$, $\operatorname{Ker}\Phi_n \subseteq \operatorname{Pext}(\check{H}^{n+1}(X),\ M)$ *и* $\operatorname{Ker}\Phi_n = \operatorname{Pext}(\check{H}^{n+1}(X), M)$, *если все X_α — квазиполиэдры.*

Следствие 1. *Если X — квазиполиэдр, то Φ_n — мономорфизм.*

Следствие 2. *Отображение Φ_n — эпиморфизм в каждом из следующих случаев:*

1) *множество J счетно,*
2) *все X_α — квазиполиэдры, $\alpha \in J$,*

3) *все X_α — компакты, а M — группа с конечным числом образующих.*

Следствие 3. *Отображение Φ_* является изоморфизмом для каждого семейства $\mathfrak{X}$ тогда и только тогда, когда M — алгебраически компактная группа. В этом и только в этом случае теория H_* совпадает с теорией гомологий Александрова — Чеха $\check{H}_*$.*

Обозначим через FA фактор-группу группы A по максимальной подгруппе, имеющей только нулевые гомоморфизмы в группу целых чисел Z.

Теорема 2. *Если все X_α — компакты и $M = Z$, то группа* $\operatorname{Ker}\Phi_n = \operatorname{Ext}(\varinjlim F(h^{n+1}), Z)$ *и, следовательно, полна.*

Теорема 3. *Если множество J счетно и группы* $\operatorname{Hom}(\check{H}^n(X_\alpha), M)$ *счетны, то группа* $\operatorname{Ker}\Phi_n$ *либо континуальна, либо равна* 0.

Институт математики
Сибирского отделения Академии наук СССР
Новосибирск

Поступило
13 X 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. И. Кузьминов, И. А. Шведов, ДАН, **200**, № 4 (1971). [2] Е. Г. Скляренко, УМН, **24**, в. 5 (149), 87 (1969).