

В. В. АНИСИМОВ

МНОГОМЕРНЫЕ ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ ЦЕПЕЙ МАРКОВА С КОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ СОСТОЯНИЙ

(Представлено академиком В. М. Глушковым 17 XI 1971)

Пусть $\{\xi_n(i), i = 1, 2, \dots, n\}$, $\xi_n(i) \in \{1, 2, \dots, r\}$, — последовательность серий случайных величин, причем в n -й серии величины $\xi_n(i)$ связаны в конечную однородную цепь Маркова с r состояниями и матрицей переходов $P(n) = \|p_{ij}(n)\|$, $i, j = 1, \dots, r$. Обозначим через $v_n^{(i)}(k)$ число попаданий в n -й серии в состояние $\{k\}$ за n шагов при условии, что $\xi_n(1) = j$.

Для описания всех возможных предельных распределений сумм случайных величин, связанных в конечную однородную цепь Маркова в схеме серий (эта задача ставилась в ⁽¹⁾), необходимо знать многомерное предельное распределение вектора $(v_n^{(j)}(1), v_n^{(i)}(2), \dots, v_n^{(i)}(r))$.

В случае $r = 2$ все предельные распределения для $v_n^{(i)}(1)$ описаны в ⁽²⁾: их оказалось 7. При $r > 2$ предельные распределения для $v_n^{(i)}(1)$ изучены в ⁽³⁾, отдельные результаты в этом направлении были получены ранее ⁽⁴⁾. В многомерном случае некоторые результаты были получены в ⁽⁵⁻⁷⁾.

В настоящей работе приведено описание всех возможных многомерных предельных распределений случайного вектора $(v_n^{(j)}(k), k = 1, \dots, r, j = 1, \dots, r)$ при соответствующей нормировке компонент, когда $n \rightarrow \infty$. (Предполагается, что используемые неслучайные пределы не зависят от способа стремления n к ∞ , так как иначе можно было бы рассматривать пределы по подпоследовательностям.)

Обозначим $p(i, j, \langle \alpha \rangle) = \lim_{n \rightarrow \infty} p_n(i, j, \langle \alpha \rangle)$, где $p_n(i, j, \langle \alpha \rangle)$ — вероятность попасть хотя бы один раз из $\{i\}$ в $\{j\}$ за μ_n шагов, $\mu_n = \min(n, \tau_n(\langle \alpha \rangle))$, а $\tau_n(\langle \alpha \rangle)$ — количество шагов до первого выхода цепи из $\langle \alpha \rangle$. Множество $\langle \alpha \rangle$ назовем s -множеством, если для любых $i, j \in \langle \alpha \rangle$ $p(i, j, \langle \alpha \rangle) = 1$. (Это понятие несколько по-другому было впервые введено в ^(8, 9).) Пусть

$$g_n(\langle \alpha \rangle) = \sum_{k \in \langle \alpha \rangle} q_n(k, \langle \alpha \rangle) \sum_{l \in \langle \alpha \rangle} p_{kl}(n),$$

где $q_n(k, \langle \alpha \rangle)$ — стационарное распределение для цепи с матрицей

$$\|\tilde{p}_{ij}(n)\|, i, j \in \langle \alpha \rangle, \\ \tilde{p}_{ij}(n) = p_{ij}(n) \left(1 - \sum_{l \in \langle \alpha \rangle} p_{il}(n)\right)^{-1}.$$

Если $ng_n(\langle \alpha \rangle) \rightarrow c$, то назовем s -множество $\langle \alpha \rangle$ типа 0, если $c = 0$, типа 1, если $0 < c < \infty$, и типа 2, если $c = \infty$. Если состояние $\{k\}$ содержится в s -множестве типа m , $m = 0, 1, 2$, будем обозначать его $\langle k, m \rangle$.

Тогда при соответствующем выборе величин $a_n(\langle k, m \rangle)$ и $b_n(\langle k, m \rangle)$ распределение случайного вектора

$$\bar{v}_j = (a_n(\langle k, m \rangle) (v_n^{(j)}(\langle k, m \rangle) - b_n(\langle k, m \rangle)), k = 1, \dots, r)$$

может слабо сходиться лишь к распределениям, указанным в теоремах 1—4.

Теорема 1. Если все состояния цепи образуют одно s -множество и матрице $\bar{P} = \lim_{n \rightarrow \infty} P(n)$ соответствует цепь либо с несколькими классами

существенных состояний (классами), либо только с одним классом $\langle \alpha \rangle$, для которого $p\gamma_n(\langle \alpha \rangle) \rightarrow \infty$, и, возможно, несущественными состояниями, то независимо от начального состояния $j = 1, \dots, r$, распределение $\bar{\nu}_j$ слабо сходится ($p. \bar{\nu}_j$ с.с.х.) к многомерному нормальному распределению, которое будет не более чем $(r-1)$ -мерным, причем здесь $b_n(\langle k, m \rangle) = pq_n(k)$, а $q_n(k)$, $k = 1, \dots, r$, — стационарное распределение для нашей цепи.

Здесь $\gamma_n(\langle \alpha \rangle)$ так определяется для одного класса: если класс разбивается в пределе на h подклассов $\langle 1 \rangle, \langle 2 \rangle, \dots, \langle h \rangle$, то $\gamma_n(\langle \alpha \rangle) = 1$, если $h = 1$, и $\gamma_n(\langle \alpha \rangle) = \max \{p_{hl}(n) : k \in \langle s \rangle, l \in \langle s + \delta \rangle, s = 1, \dots, h\}$, если $h > 1$, где $\delta = 1$ при $s < h$, и $\delta = -h + 1$ при $s = h$.

Примечание. Если матрице $\bar{P}$ соответствует один класс и несущественные состояния, то для того чтобы все состояния цепи с матрицей $P(n)$ образовывали s -множество, необходимо и достаточно, чтобы $pq_n(k) \rightarrow \infty$, $k = 1, \dots, r$.

Обозначим $\varphi_j(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} M \exp \{i(\bar{\nu}_j, \bar{t})\}$, где $\bar{t} = (t_1, t_2, \dots, t_r)$. Пусть $\overline{\varphi(t)}$ — вектор-столбец с компонентами $\varphi_j(t)$, $j = 1, \dots, r$.

Теорема 2. Пусть матрице $\bar{P}$ соответствует цепь с одним классом $\langle \alpha \rangle$, для которого $p\gamma_n(\langle \alpha \rangle) \rightarrow c_1$, $0 \leq c_1 < \infty$, и, возможно, несущественными состояниями. Обозначим h количество подклассов, а r_1 — количество состояний в классе.

Тогда $p. \bar{\nu}_j$ с.с.х. к распределению, характеристическая функция (х.ф.) которого есть j -й элемент вектора $\overline{\varphi(t)}$, причем

а) если $h = r_1$ и $pg_n(\langle \alpha \rangle) \rightarrow c_2$, $0 \leq c_2 < \infty$, то при $n \equiv d \pmod{r_1}$, $\alpha_n(\langle k, m \rangle) = 1$, $k = 1, \dots, r$,

$$b_n(\langle k, m \rangle) = \begin{cases} n/h & \text{при } k \in \langle \alpha \rangle, \\ 0 & \text{при } k \notin \langle \alpha \rangle, \end{cases}$$

$$\overline{\varphi(t)} = \frac{1}{h} \sum_{k=1}^n \lambda_k^d \exp \left\{ \frac{\delta_k(t)}{\lambda_k} \right\} \frac{1}{\prod_{\substack{l \geq h \\ l \neq k}} (\lambda_k - \lambda_l)} \left[\prod_{\substack{s=1 \\ s \neq k}}^r (\bar{P}T_1 - \lambda_s I) \right] \bar{1},$$

где I — единичная матрица, T_1 — диагональная матрица с элементами

$$\exp \left\{ i \left(t_k - \frac{1}{h} \sum_{s=1}^h t_s \right) \right\}, k = 1, \dots, r, \quad \bar{1} — \text{единичный вектор-столбец,}$$

$\delta_k(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} n(\lambda_k(n) - \lambda_k)$, $k = 1, \dots, h$, а $\lambda_k(n)$ (λ_k) — характеристические корни матрицы $P(n)T_1$ ($\bar{P}T_1$);

б) если $h < r_1$ или $pg_n(\langle \alpha \rangle) \rightarrow \infty$, то $p. \bar{\nu}_j$ с.с.х. к распределению, которое представляется как композиция независимых нормального распределения и типа а). (В частности, если $pq_n(k) \rightarrow \infty$, $k = 1, \dots, r$, то будет только нормальный закон.)

Теорема 3. Пусть состояния цепи образуют одно s -множество $\langle 0 \rangle$ типа 0 или 1 и есть еще s -множества типа 2 ($\langle 1 \rangle, \dots, \langle l \rangle$), а матрице $\bar{P}$ соответствует цепь с несколькими классами или с одним классом, для которого $p\gamma_n(\langle 0 \rangle) \rightarrow \infty$, и несущественными состояниями. Обозначим $\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} pg_n(\langle 0 \rangle)$, $0 \leq \lambda < \infty$.

Тогда, если положить $b_n(\langle k, m \rangle) = pq_n(k, \langle 0 \rangle)$ при $m = 0, 1$ и $b_n(\langle k, m \rangle) = 0$ при $m = 2$, то при условии $j \in \langle k \rangle$, $p. \bar{\nu}_j$ с.с.х. и распреде-

лению, х.ф. которого имеет вид

$$\varphi_k(t) = f_k(t) \exp \left\{ -\frac{\sigma^2(t)}{2} + \lambda [\bar{\pi} (I - T\bar{P})^{-1} T\bar{\beta} - 1] \right\},$$

причем $f_0(t) = 1$, а $f_k(t)$, $k = 1, \dots, l$, — k -й элемент вектора $(I - T\bar{P})^{-1} T\bar{\beta}$. (Здесь $\sigma^2(t)$ — некоторая квадратичная форма переменных t_i , $\bar{\pi}$ ($\bar{\beta}$) — вектор-строка (столбец), а $\bar{P}$ — матрица, элементы которых легко определяются по элементам матрицы $P(n)$. T — диагональная матрица с элементами вида либо $\exp\{it_k\}$, либо $(1 - ia_k(2))^{-1}$, где $a_k(2)$, $k = 1, \dots, l$, — некоторые линейные формы переменных t_s , $i^2 = -1$.)

Теорема 4. Пусть состояния цепи образуют несколько s -множеств типа 0 и 1 и, возможно, типа 2.

Тогда, если j принадлежит k -му s -множеству типа m , p . $\bar{v}_j$ с.с.х. к распределению, х.ф. которого есть k -й элемент вектора $\varphi_m(t)$, причем

$$\overline{\varphi_1(t)} = \overline{X(z)}|_{z=1},$$

$$\overline{\varphi_2(t)} = (I - TB_2)^{-1} T[B_1 \overline{X(z)} + B_0 \overline{Y(z)}]|_{z=1},$$

$$\overline{\varphi_0(t)} = \overline{Y(z)}|_{z=1},$$

где $\overline{X(z)}$ — вектор-решение системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \overline{X(z)} &= [i\Phi + A_2(I - TB_2)^{-1} TB_1 + \Lambda] \overline{X(z)} + \\ &+ [A_2(I - TB_2)^{-1} TB_0 + A_0] \overline{Y(z)} \end{aligned}$$

при начальных условиях $\overline{X(z)}|_{z=0} = \bar{1}$, а $\overline{Y(z)}$ — вектор-столбец с компонентами $\exp\{iza_k(0)\}$, Φ и T — диагональные матрицы с элементами $a_k(1)$ и $a_k(2)$ соответственно, $a_k(2) = \exp\{it_k\}$ или $a_k(2) = (1 - ia_k(2))^{-1}$, а $a_k(m)$, $m = 0, 1, 2$, — некоторые линейные формы переменных t_s . Элементы матриц $A_m = \|a_{is}(m)\|$ (B_m) есть предельные условные вероятности переходов из s -множеств типа 1 (2) при условии выхода из них в s -множества типа m ($m = 0, 1, 2$); они легко определяются по элементам матрицы $P(n)$, а $\Lambda = \|\lambda_{kl}\|$, где $\lambda_{kl} = a_{kl}(1)$, $k \neq l$, и $\lambda_{kk} = -\sum_{m_s}^{m_s} a_{ks}(m)$. В данном случае $b_n(\langle k, m \rangle) = 0$, $k = 1, \dots, r$, и $a_n(\langle k, m \rangle) = \frac{1}{n} q_n(k, \langle l^{(m)} \rangle)^{-1}$, если $\{k\}$ принадлежит l -му s -множеству типа m , и $a_n(\langle k, m \rangle) = 1$, если $\{k\}$ в пределе несущественно.

Киевский государственный университет
им. Т. Г. Шевченко

Поступило
12 XI 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ А. Н. Колмогоров, Вестн. Московск. ун-в., 10, 29 (1953). ² Р. Л. Добрушин, Изв. АН СССР, сер. матем., 17, № 4, 291 (1953). ³ Л. Д. Мешалкин, Теор. вероят. и ее примен., 3, № 4, 361 (1958). ⁴ А. А. Ильяшенко, Укр. матем. журн., 10, № 1, 23 (1958). ⁵ В. П. Кубилюс, Теор. вероят. и ее примен., 8, № 1, 117 (1963). ⁶ Albert Hanen, C. R., 256, № 1—3 (1963). ⁷ В. В. Анисимов, Док. АН УРСР, сер. А, № 2, 99 (1970). ⁸ В. В. Анисимов, ДАН, 193, № 4, 743 (1970). ⁹ В. В. Анисимов, Теор. вероят. и матем. статистика, Киев, в. 4, 18 (1971).