Доклады Академии наук СССР
1972. Том 202, № 6

УДК 513.882.517.5

МАТЕМАТИКА

Б. И. КОРЕНБЛЮМ

ИНВАРИАНТНЫЕ ПОДПРОСТРАНСТВА ОПЕРАТОРА СДВИГА В НЕКОТОРЫХ ВЗВЕШЕННЫХ ГИЛЬБЕРТОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

(Представлено академиком Н. Н. Боголюбовым 8 IX 1971)

1°. В настоящей заметке мы устанавливаем теорему, дающую полное описание инвариантных подпространств оператора одностороннего сдвига в некоторых взвешенных гильбертовых пространствах последовательностей с растущими степенными весами (см. [1], стр. 56).

2°. Пусть $p = \{p_0, p_1, \ldots\}$ — такая последовательность положительных чисел (весов), что частные p_{k+1}/p_k ограничены; обозначим через $l^2(p)$ гильбертово пространство последовательностей $x = (x_0, x_1, \ldots)$ комплексных чисел с нормой

$$\|x\|_{\langle p\rangle} = \Big(\sum_0^\infty p_k |x_k|^2\Big)^{1/2} \tag{1}$$

и рассмотрим в $l^2(p)$ (ограниченный оператор S: $S_x = (0, x_0, x_1, \ldots)$. Проблема описания инвариантных подпространств оператора S полностью решена лишь для следующих весовых последовательностей:

а) $p_k = 1$ $(k = 0, 1, \ldots)$ [2]; к этому случаю непосредственно сводится и более общий случай $p_k \asymp r^k$ $(r > 0)$.

б) $\{p_k\}$ убывает быстрее любой геометрической прогрессии и удовлетворяет некоторым дополнительным условиям [3, 4].

Для остальных случаев известны лишь частичные результаты [5, 6].

Определение 1. l_n^2 (n целое) — гильбертово пространство $l^2(p)$ с весовой последовательностью

$$p_k = (1+k^2)^n, \quad k = 0, 1, \ldots \tag{2}$$

Если поставить в соответствие каждому элементу $x \in l_n^2$ степенной ряд $\hat{x}(z) = \sum_0^\infty x_k z^k$ ($|z| < 1$ при $n \leqslant 0$, $|z| \geqslant 1$ при $n \geqslant 1$), то устанавливается линейный гомеоморфизм l_n^2 на пространство H_n^2 функций $\hat{x}(z)$, регулярных в единичном круге $U(|z| < 1)$ и таких, что $\hat{x}^{(n)} \in H^2$, с нормой *

$$\|\hat{x}\|_{H_n^2} = \begin{cases} (\|\hat{x}\|^2 + \|\hat{x}^{(n)}\|^2)^{1/2}, & n \geqslant 1, \\ \|\hat{x}^{(n)}\|, & n \leqslant 0, \end{cases} \tag{3}$$

(для отрицательных n $\hat{x}^{(n)}$ означает n-кратный интеграл от точки 0). При этом оператору сдвига S соответствует оператор $\hat{S}$ умножения на z. Для $n \geqslant 1$ пространства H_n^2 являются банаховыми алгебрами с обычным умножением [5], а инвариантные относительно $\hat{S}$ подпространства совпадают с замкнутыми идеалами этих алгебр.

Определение 2. Пусть $n \geqslant 1$ фиксировано, $K_0, K_1, \ldots, K_{n-1}$ — замкнутые множества точек окружности ∂U, удовлетворяющие условиям

* $\|\cdot\|$ означает норму в H^2.

а) $K_0 \supset K_1 \supset \ldots \supset K_{n-1}$;

б) $K_0 \setminus K_{n-1}$ изолировано.

Пусть далее, $G(z)$ — такая внутренняя функция ((1), стр. 86), что

в) все предельные точки ее множества нулей $\{\alpha_k\}$ принадлежат K_{n-1},

г) сингулярная мера, входящая в каноническую факторизацию $G(z)$, сосредоточена на K_{n-1}.

Будем обозначать через $J\{G;\ K_0, K_1, \ldots, K_{n-1}\}$ (замкнутый) идеал алгебры H_n^2, состоящий из всех функций $\hat{x}(z)$, которые удовлетворяют условиям

1) $\hat{x}(z) = \hat{x}'(z) = \ldots = \hat{x}^{(i)}(z) = 0,\ z \in K_i;\ i = 0, 1, \ldots, n-1$;

2) $G(z)$ делит внутреннюю часть $\hat{x}(z)$.

Замечание. Из результатов (7) следует, что идеал $J(G;\ K_0, \ldots, K_{n-1}\}$ отличен от нулевого тогда и только тогда, когда выполняется условие

$$\int\limits_{\partial U} \log \rho(z)\,|dz| > -\infty, \tag{4}$$

где $\rho(z) = \min\limits_{\zeta \in k} |z - \zeta|,\ K = K_0 \cup \{\alpha_k\}$.

Теорема. *Пусть J — произвольный нулевой замкнутый идеал алгебры H_n^2 ($n \geqslant 1$ фиксировано). Пусть далее,*

а) $K_i = \bigcap\limits_{\hat{x} \in J} K_i(\hat{x}),\ i = 0, \ldots, n-1,$ *где* $K_i(\hat{x}) = \{z\colon\ z \in \partial U,\ \hat{x}(z) = \hat{x}'(z) = \ldots = \hat{x}^{(i)}(z) = 0\}$;

б) $G(z)$ — *наибольший общий делитель внутренних частей функций* $\hat{x} \in J$.

Тогда $J = J\{G;\ K_0, \ldots, K_{n-1}\}$, причем множества K_i и функция $G(z)$ удовлетворяют условиям а) — г) *определения* 2 *и неравенству* (4).

3°. Ввиду сложности доказательства мы можем здесь лишь наметить его ход. Очевидно, достаточно доказать, что всякий линейный функционал в H_n^2, равный нулю на J (множество таких функционалов будем называть аннулятором J), обращается в нуль и на $J\{G;\ K_0, \ldots, K_{n-1}\}$. Каждый линейный функционал в H_n^2 имеет вид $a(\hat{x}) = \sum\limits_{k}^{\infty} a_k x_k$, где $a = (a_0, a_1, \ldots) \in l_{-n}^2$. Применяя метод, идея которого восходит к Карлеману (8), мы доказываем следующее предложение

Лемма 1. *Пусть $0 \neq x = (x_0, x_1, \ldots) \in l_n^2$, $0 \neq a = (a_0, a_1, \ldots) \in l_{-n}^2$. Пусть далее,*

$$\sum_{s=0}^{\infty} a_{k+s} x_s = 0, \quad k = 0, 1, \ldots$$

Обозначим

$$\begin{gathered} b_k = \sum_{s=0}^{\infty} a_s x_{k+s}, \quad k \geqslant 1; \quad \hat{b}(z) = \sum_{1}^{\infty} b_k z^k, \quad z \in U; \\ \hat{x}(z) = \sum_{0}^{\infty} x_k z^k, \quad z \in \overline{U}; \quad h(z) = \sum_{0}^{\infty} a_k z^{-k}, \quad z \in \overline{C} \setminus \overline{U}. \end{gathered} \tag{5}$$

Тогда $h(z)$ аналитически продолжается в U через каждую дугу $\gamma \subset \partial U$, на которой $\hat{x}(z)$ не обращается в нуль, причем аналитическим продолжением $h(z)$ является функция $\hat{b}(z) / \hat{x}(z)$.

Затем устанавливается лемма, уточняющая свойства аналитически продолженной функции $h(z)$ в случае, когда $a = (a_0, a_1, \ldots)$ — ненулевой элемент аннулятора J, а $G(z) \equiv 1$ (в этом случае $h(z)$ регулярна в области $\overline{C} \setminus K_0$).

Лемма 2. *В указанных условиях $h(z)$ — функция ограниченной характеристики (т. е. класса Неванлинны) в каждой из областей U, $\overline{\mathbf{C}} \setminus \overline{U}$, причем справедлива оценка*

$$|h(z)| \leqslant C[\rho(z)]^{-2(2n+1)}, \qquad 1 \leqslant |z| \leqslant 2, \tag{6}$$

где $\rho(z) = \min\limits_{\zeta \in K_0} |z - \zeta|$. Далее, каждая точка, принадлежащая множеству $K_{i-1} \setminus K_i$, $1 \leqslant i \leqslant n-1$, является полюсом $h(z)$ кратности не выше i.

Из леммы 2 следует, что в случае $G = 1$ идеалу J принадлежат все элементы $\hat{x} \in J\{1; K_0, \ldots, K_{n-1}\}$, удовлетворяющие условию: существует множество $\tilde{K}$ и положительная константа C (зависящие от $\hat{x}$) такие, что

1) $K_{n-1} \subset \tilde{K} \subset K_0$;

2) $K_0 \setminus \tilde{K}$ конечно;

3) $|\hat{x}(z)| \leqslant C[\tilde{\rho}(z)]^{2(2n+1)}$, $z \in \partial U$, где $\tilde{\rho}(z) = \min\limits_{\zeta \in \tilde{K}} |z - \zeta|$.

Пусть $\tilde{J}$ — линейное множество таких элементов.

Лемма 3. *Множество $\tilde{J}$ плотно в $J\{1; K_0, \ldots, K_{n-1}\}$.*

Эта лемма устанавливает справедливость нашей теоремы в случае $J = 1$. Общий случай сводится к рассмотренному, причем существенную роль при этом играет теорема деления ([9]).

4°. В случае $n = 1$ можно показать, что каждый замкнутый идеал алгебры H_1^2 главный (т. е. порожден одним элементом). Нам неизвестно, справедливо ли подобное утверждение для алгебр H_n^2 при $n \geqslant 2$.

Киевский инженерно-строительный институт

Поступило 31 VIII 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] П. Халмош, Гильбертово пространство в задачах, М., 1970. [2] A. Beurling, Acta Math., 81, № 1—2, 239 (1949). [3] W. F. Donoghue, Pacific J. Math., 7, № 2, 1031 (1957). [4] Н. К. Никольский, Матем. сборн., 74 (116), № 2, 171 (1967). [5] В. С. Королевич, Изв. АН АрмССР, 5 (математика), № 4, 346 (1970). [6] Н. М. Осадчий, Укр. матем. журн., 23, № 6 (1971). [7] Б. И. Коренблюм, ДАН, 200, № 1 (1971). [8] T. Carleman, L'integrale de Fourier et questions qui s'y rattachent, Uppsala, 1944. [9] Б. И. Коренблюм, Матем. заметки, 10, № 1, 53 (1971).