Доклады Академии наук СССР
1972. Том 203, № 4

УДК 518 : 517.944/.947

МАТЕМАТИКА

А. МАМАТКУЛОВ, Я. Д. МАМЕДОВ

# О РАЗНОСТНОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ЛАВРЕНТЬЕВА — БИЦАДЗЕ

*(Представлено академиком И. Н. Векуа 24 IX 1971)*

1. Постановка задачи. Пусть $D$ — односвязная конечная смешанная область плоскости переменных $x$, $y$, ограниченная простой дугой Жордана $\sigma$ с концами в точках $A(0, 0)$, $B(1, 0)$, лежащей в верхней полуплоскости $y>0$, и характеристиками $AC$: $x+y=0$ и $BC$: $x-y=1$ уравнения

$$\operatorname{sign} y \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+a(x, y)\frac{\partial u}{\partial x}+b(x, y)\frac{\partial u}{\partial y}=f(x, y, u). \tag{1}$$

Совокупность точек области $D$, для которых $y>0$ $(y<0)$ обозначим $D^+$ $(D^-)$, а через $\bar{D}$ обозначим замыкание $D$.

Задача. Найти функцию $u(x, y)$, обладающую свойствами:

1) $u(x, y)$ удовлетворяет уравнению (1) в каждой из областей $D^+$ и $D^-$ и

$$u|_\sigma=\varphi(x, y), \quad u|_{AC}=\psi(x, y), \quad \varphi(0, 0)=\psi(0, 0), \tag{2}$$

2) $u(x, y)$ непрерывна в $\bar{D}$, а $\partial u/\partial x$, $\partial u/\partial y$ непрерывны в $D$, причем $\partial u/\partial y$ непрерывна при переходе через $AB$.

Предполагается, что функции $f(x, y, u)$, $a(x, y)$, $b(x, y)$, $\varphi(x, y)$, $\psi(x, y)$ имеют по всем своим аргументам непрерывные частные производные и $f_u'(x, y, u)\geqslant 0$.

Для отыскания приближенного численного решения задачи (1), (2) применим сетку, аналогичную ([1]) (здесь вопрос разрешимости задачи (1), (2) не рассматривается, по этому поводу см., например, ([2])). При $y\leqslant 0$ эта сетка состоит из точек пересечения характеристик уравнения (1), проведенных через точки деления отрезка $AB$ на $q$ равных частей длины $h$; при $y\geqslant 0$ сетка квадратная с достаточно малым шагом $h$.

Пусть $D_h^+$ — совокупность внутренних узлов, все четыре соседние узла которых принадлежат $\bar{D}^+$; $D_h^*$ — совокупность таких внутренних узлов, хотя бы один из соседних узлов которого не принадлежит $\bar{D}^+$; $D_h^-$ — множество узлов, принадлежащих $\bar{D}^-\setminus\Gamma_0$, через $\Gamma_0$ обозначена характеристика $AC$ уравнения (1); $J_h$ — множество узлов, лежащих на отрезке $AB$, за исключением точек $A$ и $B$; $\sigma_h$, $\Gamma_{0h}$ — множество граничных узлов, принадлежащих соответственно $\sigma$, $\Gamma_0\setminus A$, и, наконец, $\bar{D}_h^+=D_h^+\cup D_h^*\cup\cup\sigma_h\cup J_h$, $\bar{D}_h^-=D_h^-\cup\Gamma_{0h}\cup J_h$, $\bar{D}_h=\bar{D}_h^+\cup\bar{D}_h^-$.

Наша цель определить в узловых точках, находящихся внутри $D$, приближенные значения решения $u(x, y)$ задачи (1), (2). Эти приближенные значения определяются из следующей системы:

$$\begin{gathered}L_h^*(v)\equiv\frac{1}{h_{1,3}}\left[\frac{v(x+h_1, y)-v(x, y)}{h_1}-\frac{v(x, y)-v(x-h_3, y)}{h_3}\right]+\\+\frac{1}{h_{2,0}}\left[\frac{v(x, y+h_2)-v(x, y)}{h_2}-\frac{v(x, y)-v(x, y-h)}{h}\right]+\\+a(x, y)\frac{v(x+h_1, y)-v(x-h_3, y)}{2h_{1,3}}+b(x, y)\frac{v(x, y+h_2)-v(x, y-h)}{2h_{2,0}}=\\=f(x, y, v(x, y)),\ (x, y)\in D_h^*;\end{gathered} \tag{3}$$

$$L_h^+(v) \equiv \Delta_h(v) + a(x, y)\frac{v(x+h, y) - v(x-h, y)}{2h} +$$
$$+ b(x, y)\frac{v(x, y+h) - v(x, y-h)}{2h} = f(x, y, v(x, y)), \qquad (x, y) \in D_h^+; \quad (4)$$
$$L_h^0(v) \equiv v(x, h) - 2v(x, 0) + v(x, -h) = 0, \quad (x, 0) \in J_h; \quad (5)$$
$$L_h^-(v) \equiv \frac{4}{h^2}(v_{k, n-1} + v_{k-1, n+1} - v_{k-1, n} - v_{k, n}) +$$
$$+ a_{k, n}\frac{v_{k, n} - v_{k-1, n}}{h} + b_{k, n}\frac{v_{k, n-1} - v_{k-1, n+1}}{h} = f_{k, n}(v_{k, n}), \quad (k, n) \in D_h^-; \quad (6)$$
$$v|_{\sigma_h} = \varphi_h, \quad v|_{\Gamma_{0h}} = \psi_h; \quad (7)$$

где $v_{k,n} = v(x, -y)$, $a_{k,n} = a(x, -y)$, $b_{k,n} = b(x, -y)$, $f_{k,n}(v_{k,n}) = f(x, -y, v_{k,n})$, $x = kh + {}^1/_2 nh$, $y = {}^1/_2 nh$, $k, n = 1, 2, \ldots$, $h_{1,3} = {}^1/_2(h_1 + h_3)$, $h_{2,0} = {}^1/_2(h_2 + h)$, $h_1, h_2, h_3 \leqslant h$, хотя бы один из $h_\mu$, $\mu = 1, 2, 3$, отличен от $h$; $\Delta_h$ — разностный оператор Лапласа.

2. Линейная задача. Рассмотрим линейный оператор, определенный в $\bar{D}_h$ следующим образом:

$$l_h(v) \equiv \begin{cases} L_h^*(v) - \gamma v, & (x,y) \in D_h^*, \\ L_h^+(v) - \gamma v, & (x,y) \in D_h^+, \\ L_h^0(v), & (x,0) \in J_h, \\ L_h^-(v) - \gamma v, & (x, -y) \in D_h^-, \end{cases}$$

где $\gamma = \gamma(x, y) \geqslant 0$ — некоторая непрерывная функция, определенная в $\bar{D}$.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия*

$$v_{0, n} \geqslant 0, \quad (1 - {}^1/_4 hb_{2, n}) v_{0, n+1} \geqslant (1 + {}^1/_4 ha_{1, n}) v_{0, n}, \quad n = 1, 2, \ldots, \quad (8)$$
$$(1 + {}^1/_4 hb_{k, n})(1 - {}^1/_4 hb_{k+1, n-1}) \geqslant (1 + {}^1/_4 h^2\gamma_{k, n} -$$
$$- {}^1/_4 ha_{k, n})(1 + {}^1/_4 ha_{k+1, n-1}), \quad k = 1, 2, \ldots, n = 2, 3, \ldots, \quad (9)$$
$${}^1/_4 ha_{k, n} - {}^1/_4 h^2\gamma_{k, n} < 1, \quad b_{1, n} + a_{1, n} < 0, \quad k, n = 1, 2, 3, \ldots \quad (10)$$

*Пусть* $l_h(v_{k, n}) \leqslant 0$, $(k, n) \in D_h^-$, $v_{k, 0} \geqslant 0$, $k = 1, 2, \ldots$

*Тогда* $v_{k, n} \geqslant 0$ *и*

$$(1 - {}^1/_4 hb_{k+1, n}) v_{k,n+1} \geqslant (1 + {}^1/_4 ha_{k+1,n}) v_{k,n}, \quad (k, n) \in D_h^-.$$

Теорема 2. *Пусть выполнены условия* (8) — (10). *Пусть функция* $v$ *определена в* $\bar{D}_h$, $l_h(v) \leqslant 0$ *в* $D_h$, $v \geqslant 0$ *на* $\sigma_h$.

*Тогда* $v \geqslant 0$ *в* $D_h$ *и при достаточно малых* $h$ *для решения* $v$ *системы*

$$l_h(v) = 0, \quad v|_{\sigma_h} = \varphi_h, v|_{\Gamma_{0h}} = \psi_h$$

*имеет место оценка*

$$\min\left\{0, \min_{\sigma_h}\varphi_h, \min_n \psi_n, \min_n\left(\psi_n + \frac{1 - {}^1/_4 hb_{1, n}}{{}^1/_4 h(b_{1,n} + a_{1,h})}(\psi_n - \psi_{n+1})\right)\right\} \leqslant$$
$$\leqslant v \leqslant \max\left\{0, \max_{\sigma_h}\varphi_h, \max_n \psi_n, \max_n\left(\psi_n + \frac{1 - {}^1/_4 hb_{1, n}}{{}^1/_4 h(b_{1,n} + a_{1,n})}(\psi_n - \psi_{n+1})\right)\right\}.$$

Близкие теоремы для уравнения Трикоми имеются в ([3]) (см. также ([4])).

Пронумеруем все внутренние узлы в следующем порядке. Сначала узлы $D_h^*$, затем узлы $D_h^+$, затем все узлы на $J_h$, начиная слева, затем все узлы $D_h^-$ в следующем порядке: сначала точки на характеристике

$x+y=h$ в порядке возрастания $|y|$, затем точки на характеристике $x+y=2h$ в том же порядке и т. д. После этого пронумеруем все граничные узлы в следующем порядке: сначала узлы $\sigma_h$, затем узлы $\Gamma_{0h}$.

Итак, $P_i \in D_h^*$, $i=1, 2, \ldots, N_1$; $P_i \in D_h^+$, $i=N_1+1, N_1+2, \ldots, N_2$); $P_i \in J_h$, $i=N_2+1$, $N_2+2, \ldots, N_3$; $P_i \in D_h^-$, $i=N_3+1$, $N_3+2, \ldots, N$; $P_j \in \sigma_h$, $j=N+1, N+2, \ldots, M_1$; $P_j$, $j=M_1+1, M_1+2, \ldots, M$. Следовательно, количество внутренних и граничных узлов соответственно равняется $N$ и $M-N$.

Теперь рассмотрим задачу

$$l_h(v_i)=K_i,\ i=1, 2, \ldots, N;\ v_j=\overline{\varphi}_j,\ j=N+1, N+2, \ldots, M. \tag{11}$$

Задача (11) эквивалентна следующей системе:

$$\sum_{s=1}^{N} \alpha^{is} v_s = K_i + \sum_{j=N+1}^{M} \beta^{ij}\overline{\varphi}_j, \quad i=1,2,\ldots, N.$$

Когда $K_i \equiv 0$, $\overline{\varphi}_j \equiv 0$, задача (11) имеет только тривиальное решение. Это следует из теоремы 2. Поэтому $\det(\alpha^{is}) \neq 0$, $i$, $s=1, 2, \ldots, N$. Следовательно, обратная матрица $(\alpha^{is})^{-1}=(G^{is})$ существует и единственное решение задачи (11) дается формулой

$$v_i = \sum_{s=1}^{N} G^{is}K_s + \sum_{j=N+1}^{M} \Gamma^{ij}\overline{\varphi}_j,\ \ \Gamma^{ij}=\sum_{n=1}^{N} G^{in}\beta^{nj}.$$

Отсюда следует, что

$$|v_i| \leqslant C(d) \max_i |l_h(v_i)| + \max_j |v_j|, \tag{12}$$

где $C(d)=\text{const}>0$, $d$ — диаметр области $D$.

3. Квазилинейная задача. Через $P_{i\nu}$ обозначим соседние узловые точки $P_i$. Пусть $v_{i\nu}=v(P_{i\nu})$. Системы (3)—(7) перепишем в виде

$$\begin{gathered} S_i = v_i + A_i f(x_i, y_i, v_i), \quad i=1, 2, \ldots, N, \\ v_j=\varphi_j,\ j=N+1,\ N+2, \ldots, M_1,\ v_j=\psi_j,\ j=M_1+1,\ M_1+2, \ldots, M, \end{gathered} \tag{13}$$

где $S_i$ — известные функции от $v_{i\nu}$; $A_i$ — известные числа.

Из условия $f_u' \geqslant 0$ следует, что система (13) при каждом фиксированном $i=1, 2, \ldots, N$ имеет единственное решение

$$v_i = g_i(x_i, y_i, S_i), \quad i=1, 2, \ldots, N,$$

которое перепишем в виде

$$v_i = \begin{cases} \Phi_i^{\mathrm{I}}(v_{i1},\ v_{i2},\ v_{i3},\ v_{i4}), & i=1,2,\ldots, N_1, \\ \Phi_i^{\mathrm{II}}(v_{i1}, v_{i2}, v_{i3}, v_{i4}), & i=N_1+1,\ N_1+2, \ldots,\ N_2, \\ \Phi_i^{\mathrm{III}}(v_{i2},\ v_{i4}), & i=N_2+1,\ N_2+2, \ldots, N_3, \\ \Phi_i^{\mathrm{IV}}(v_{i2}, v_{i3}, v_{i4}), & i=N_3+1,\ N_3+2, \ldots, N; \end{cases}$$

$$v_j=\varphi_j,\ j=N+1,\ \ N+2, \ldots, M_1;\ v_j=\psi_j,\ \ j=M_1+1,\ \ M_1+2, \ldots, M.$$

Пусть $v_i^{(0)}$ — какая-либо сеточная функция, определенная в $\overline{D}_h$ и удовлетворяющая граничным условиям. Тогда последовательность сеточных функций $v_i^{(m)}$ определяем следующим образом:

$$
v_i^{(m+1)} = \begin{cases} \Phi_i^{\mathrm{I}}(\tilde{v}_{i1}^{(m)}, \tilde{v}_{i2}^{(m)}, \tilde{v}_{i3}^{(m)}, \tilde{v}_{i4}^{(m)}), \quad \tilde{v}_{i\nu}^{(m)} = \begin{cases} v_{i\nu}^{(m+1)}, & P_{i\nu} = P_k,\ k < i, \\ v_{i\nu}^{(m)}, & P_{i\nu} = P_k,\ k > i, \end{cases} \\ \qquad i = 1, 2, \ldots, N_1, \\ \Phi_i^{\mathrm{II}}(\tilde{v}_{i1}^{(m)}, \tilde{v}_{i2}^{(m)}, \tilde{v}_{i3}^{(m)}, \tilde{v}_{i4}^{(m)}), \quad \tilde{v}_{i\nu}^{(m)} = \begin{cases} v_{i\nu}^{(m+1)}, & P_{i\nu} = P_k, \quad k < i, \\ v_{i\nu}^{(m)}, & P_{i\nu} = P_k, \quad k > i, \end{cases} \\ \qquad i = N_1 + 1,\ N_1 + 2, \ldots, N_2, \\ \Phi_i^{\mathrm{III}}(v_{i2}^{(m+1)}, v_{i4}^{(m)}), \quad i = N_2 + 1, \quad N_2 + 2, \ldots, N_3, \\ \Phi_i^{\mathrm{IV}}(v_{i2}^{(m+1)}, v_{i3}^{(m+1)}, v_{i4}^{(m+1)}), \quad i = N_3 + 1, \quad N_3 + 2, \ldots, N, \end{cases} \tag{14}
$$

$$
v_j^{(m+1)} = v_j^{(m)} = \bar{\varphi}_j, \quad \bar{\varphi}_j = \varphi_j, \quad j = N + 1, \quad N + 2, \ldots, M_1,
$$

$$
\bar{\varphi}_j = \psi_j, \quad j = M_1 + 1, \ldots, M.
$$

Пользуясь предыдущими теоремами и неравенством (12) доказываем следующую основную теорему.

Теорема 3. *Пусть $a$, $b$ и $f$ удовлетворяют условиям* (8) — (10), *если положить $\gamma = f_u'(x, y, u)$, где $u(x, y)$ — произвольная непрерывная функция. Для достаточно малых $h$ разностная задача* (3) — (7) *имеет единственное решение, это решение является пределом последовательных приближений* (14). *Если дополнительно предполагать, что $u(x, y) \in C^3(\bar{D})$, то*

$$
|v_i - u_i| \leqslant c(d)\bar{M}h,
$$

*где $u_i$ — решения задачи* (1), (2) *в узловых точках.*

Заметим, что для сходимости $v_i$ к решению $u_i$ условие $u(x, y) \in C^3(\bar{D})$ можно заменить дополнительным условием на границе области $D$, т. е. предположить, что при некотором $0 < x_0 < 1$ дуга $\sigma$ имеет только одну общую точку с любой прямой вида $x - x_0 = cy$, $-\infty < c < +\infty$. Этот последний факт доказывается по методу ([3]).

4. В заключение заметим, что в случае, когда $a$, $b$, $f \equiv 0$, аналогичные результаты для задачи (1), (2) ранее были получены в ([1]). Также заметим, что подобные исследования для других классов линейных уравнений были проведены в ([3–5]). Насколько нам известно, квазилинейные уравнения смешанного типа методом сеток впервые исследуются в нашей работе.

Азербайджанский государственный университет
им. С. М. Кирова
Баку

Поступило
16 IX 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] З. И. Халилов, Докл. АН АзССР, 9, № 4, 189 (1953). [2] Г. Г. Салахтев, Изв. высш. учебн. завед., № 4, 81 (1967). [3] А. Ф. Филиппов, Изв. АН СССР, сер. матем., **21**, 73 (1957). [4] Л. И. Коваленко, Сиб. матем. журн., **11**, № 6, 1291 (1970). Н. Ogawa, Trans. Am. Math. Soc., **100**, 404 (1961).