Доклады Академии наук СССР
1971. Том 200, № 6

УДК 519.95 КИБЕРНЕТИКА И ТЕОРИЯ РЕГУЛИРОВАНИЯ

Л. И. ФЕЙГИН

УПРАВЛЕНИЕ И ПРОГНОЗИРОВАНИЕ В ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ РАСПИСАНИЙ ПРИ НЕПОЛНОЙ ИНФОРМАЦИИ

(Представлено академиком А. А. Вороновым 7 IV 1971)

В задачах теории расписаний ([1, 2]) обычно предполагается, что параметры операций являются детерминированными величинами. В статье рассматривается построение оптимальных расписаний со случайными параметрами. При исследовании применяются методы теории статистических решений и динамического программирования.

1. Постановка задачи. Под расписанием обычно понимается вектор $\bar{X} = \{\alpha_q, \tau_q\}$ $(q = 1, \ldots, d)$, где α_q — начало выполнения q-й операции, τ_q — длительность выполнения q-й операции, d — число операций в расписании.

Управляющими воздействиями при построении расписания могут быть последовательность обработки объектов на машинах, способ назначения работ на машины и другие характеристики. При построении оптимального расписания с детерминированными параметрами операций требуется определить управляющее воздействие $\bar{u}$, при котором минимизируется функция потерь W.

Рассмотрим случай, когда параметр q-й операции β_q $(q = 1, \ldots, d)$ является случайной величиной с неизвестным математическим ожиданием m_q $(q = 1, \ldots, d)$. Таким параметром может быть длительность операции, стоимость ее выполнения и т. д. Используя байесов подход, будем считать для величины m_q известной априорную плотность распределения вероятностей $P(m_q)$. Поскольку операции, для которых составляется расписание, могут повторяться многократно, то изучается многошаговый процесс, на каждом шаге которого производится построение оптимального расписания выполняемых операций. При этом выбор управляющего воздействия на каждом шаге зависит от информации о значениях случайных параметров, полученной на предыдущих шагах. Таким образом, рассматриваемая система является системой с неполной информацией ([3]), и в процессе управления происходит накопление информации о случайных параметрах операций.

Обозначим значение случайного параметра q-й операции, полученное на k-м шаге, через β_{qk} $(q = 1, \ldots, d;\ k = 1, \ldots, g$, где g — число шагов$)$. Тогда вектор случайных параметров на k-м шаге $\bar{\beta}_k = \{\beta_{qk}\}$, $(q = 1, \ldots, d)$. Пусть вектор $\bar{u}_k$ представляет собой управляющее воздействие на k-м шаге. Предположим, что координаты вектора $\bar{u}_k$ являются дискретными величинами, причем $\bar{u}_k \in \Omega(\bar{u}_k)$, где $\Omega(\bar{u}_k)$ — множество допустимых управлений на k-м шаге. Обозначим матрицу управлений за k шагов через $\bar{\mathbf{u}}_k = \|\bar{u}_1 \ldots \bar{u}_l \ldots \bar{u}_k\|$, а матрицу случайных параметров за k шагов через $\bar{\boldsymbol{\beta}}_k = \|\bar{\beta}_1 \ldots \bar{\beta}_l \ldots \bar{\beta}_k\|$. Под стратегией на k-м шаге будем понимать вектор $\bar{p}_k = \{p_{\bar{u}_k}\}$ $(\bar{u}_k \in \Omega(\bar{u}_k))$, где $p_{\bar{u}_k} = p(\bar{u}_k | \bar{\mathbf{u}}_{k-1}, \bar{\boldsymbol{\beta}}_{k-1})$ и представляет собой условную вероятность управляющего воздействия $\bar{u}_k$ при заданных матрицах $\bar{\mathbf{u}}_{k-1}$ и $\bar{\boldsymbol{\beta}}_{k-1}$. При этом должны выполняться условия

$$0 \leqslant p_{\bar{u}_k} \leqslant 1, \quad \bar{u}_k \in \Omega(\bar{u}_k); \tag{1}$$

$$\sum_{\bar{u}_k \in \Omega(\bar{u}_k)} p_{\bar{u}_k} = 1. \tag{2}$$

Если обозначить функцию потерь на k-м шаге через W_k ($k = 1, \ldots, g$), то риск на k-м шаге представляет математическое ожидание функции потерь и равен

$$R_k = MW_k, \quad k = 1, \ldots, g. \tag{3}$$

В рассматриваемой задаче надо определить стратегии $\bar{p}_k$ ($k = 1, \ldots, g$), удовлетворяющие условиям (1), (2) и минимизирующие полный риск за g шагов $R = \sum_{k=1}^{g} R_k$.

2. Оптимизация риска. Рассмотрим сначала определение на каждом шаге стратегии $\bar{p}_k^*$, оптимальной по критерию R_k. Пусть вектор математических ожиданий случайных параметров операций $\bar{m} = \{m_q\}$ ($q = 1, \ldots, d$). В предположении, что векторы β_l ($l = 1, \ldots, g$) независимы, можно показать, что оптимальная стратегия на k-м шаге ($k = 1, \ldots, g$) является регулярной стратегией и для нахождения оптимального по критерию R_k управляющего воздействия на k-м шаге $\bar{u}_k^*$ требуется минимизировать функцию δ_k, определяемую выражениями

$$\delta_k = P(\bar{\boldsymbol{\beta}}_{k-1}) M\{M[W_k(\beta_k, \bar{u}_k) \mid \bar{m}] \mid \bar{\boldsymbol{\beta}}_{k-1}\}, \; k = 2, \ldots, g, \tag{4}$$

$$\delta_1 = M\{M[W_1(\beta_1, \bar{u}_1) \mid \bar{m}]\}, \tag{5}$$

где $P(\bar{\boldsymbol{\beta}}_{k-1})$ — плотность распределения вероятностей матрицы $\bar{\boldsymbol{\beta}}_{k-1}$. $M[W_k(\beta_k, \bar{u}_k) \mid \bar{m}]$ — условное математическое ожидание функции потерь W_k при заданном векторе $\bar{m}$.

Рассмотрим теперь задачу оптимизации полного риска. Обозначим оптимальную по критерию R стратегию на k-м шаге вектором $\bar{p}_k^{**}$. Часть полного риска, приходящуюся на шаги, начиная с номера $g - s$ ($s = 0, \ldots, g - 1$) до номера g, обозначим через $F_{g-s} = \sum_{k=g-s}^{g} R_k$, а значение F_{g-s} при оптимальных стратегиях на этих шагах — через $Q_{g-s} = F_{g-s}(\bar{p}_{g-s}^{**}, \ldots, \bar{p}_g^{**})$. Тогда уравнение Беллмана для рассматриваемой задачи имеет вид

$$Q_{g-s} = \min_{\bar{p}_{g-s} \in \Omega(\bar{p}_{g-s})} (R_{g-s} + Q_{g-s+1}), \quad s = 1, \ldots, g - 1, \tag{6}$$

где $\Omega(\bar{p}_{g-s})$ — область изменения вектора $\bar{p}_{g-s}$.

Используя уравнение (6), можно показать, что оптимальная стратегия на $(g - s)$-шаге является регулярной стратегией и для определения оптимального по критерию R управляющего воздействия на $(g - s)$-м шаге $\bar{u}_{g-s}$ надо минимизировать функцию ψ_{g-s} вида

$$\psi_{g-s} = \delta_{g-s} + \int\limits_{\Omega(\bar{\beta}_{g-s})} \psi^*_{g-s+1} \, d\Omega, \quad s = 1, \ldots, g - 1. \tag{7}$$

При этом минимальное значение функции ψ_{g-s} равно $\psi^*_{g-s} = \psi_{g-s}(\bar{u}^{**}_{g-s})$, а значение $\psi_g^* = \delta_g(\bar{u}_g^*)$. Оптимальное по критерию R управляющее воздействие на g-м шаге $\bar{u}_g^{**} = \bar{u}_g^*$. Можно сформулировать следующую теорему.

Теорема 1. *Если функция δ_k ($k = 2, \ldots, g$) не зависит от матрицы управлений $\bar{\mathbf{u}}_{k-1}$, то оптимальные по критерию R и по критерию R_k управляющие воздействия на каждом шаге совпадают.*

План доказательства состоит в следующем. Индукцией по s можно показать, что если функция δ_k не зависит от $\bar{\mathbf{u}}_{k-1}$, то функция ψ_{g-s+1} не зависит от матрицы $\bar{\mathbf{u}}_{g-s}$. Тогда второе слагаемое в (7) также не зависит от $\mathbf{u}_{g-s}$ и минимизация функции ψ_{g-s} сводится к минимизации функции δ_{g-s}, т. е. $\bar{u}^{**}_{g-s} = \bar{u}^*_{g-s}$.

3. Связь между управлением и прогнозированием. Рассмотрим связь процессов управления и прогнозирования при построении оптимальных расписаний со случайными параметрами. Обозначим через $\hat{\beta}_{qk}$ $(q=1, \ldots, d;\ k=2, \ldots, g)$ прогнозируемое значение случайного параметра q-й операции на k-шаге. Пусть функция потерь при прогнозировании имеет вид

$$W'(\beta_{qk}, \hat{\beta}_{qk}) = (\beta_{qk} - \hat{\beta}_{qk})^2, \quad q=1, \ldots, d;\ k=2, \ldots, g. \tag{8}$$

Тогда риск при прогнозировании равен

$$R'(\hat{\beta}_{qk}) = \int_{-\infty}^{\infty} (\beta_{qk} - \hat{\beta}_{qk})^2 P(\beta_{qk} \mid \boldsymbol{\beta}_{q,\,k-1})\, d\beta_{qk}, \tag{9}$$

$$q=1, \ldots, d;\ k=2, \ldots, g,$$

где $P(\beta_{qk} \mid \boldsymbol{\beta}_{q,\,k-1})$ — апостериорная условная плотность распределения вероятностей величины β_{qk} при заданном векторе $\boldsymbol{\beta}_{q,\,k-1} = \{\beta_{ql}\}$, $(l=1, \ldots, k-1)$.

Оптимальное прогнозируемое значение случайного параметра q-й операции на k-м шаге, при котором риск (9) минимален, равно

$$\hat{\beta}^*_{qk} = \int_{-\infty}^{\infty} \beta_{qk} P(\beta_{qk} \mid \boldsymbol{\beta}_{q,\,k-1})\, d\beta_{qk}, \quad q=1, \ldots, d;\ k=2, \ldots, g. \tag{10}$$

В п. 1 предполагалась известной для величины m_q априорная плотность распределения вероятностей $P(m_q)$. Обозначим соответствующее этой плотности распределения математическое ожидание величины m_q через m_{q0}.

Связь процессов управления и прогнозирования выражает

Теорема 2. *Если функция потерь $W_k(\bar{\beta}_k, \bar{u}_k)$ линейна относительно значений случайных параметров операций β_{qk} $(q=1, \ldots, d)$, то для нахождения оптимального по критерию R_k управляющего воздействия на k-м шаге $(k=2, \ldots, g)$ требуется минимизировать функцию W_k с заменой величины β_{qk} на величину оптимального прогнозируемого значения случайного параметра $\hat{\beta}^*_{qk}$. Для нахождения оптимального по критерию R_1 управляющего воздействия на первом шаге требуется минимизировать функцию W_1 с заменой величины β_{q1} на величину m_{q0}.*

Изложим план доказательства теоремы. Если функция потерь линейная, то в выражении (4) значение $M[W_k(\bar{\beta}_k, \bar{u}_k) \mid \bar{m}] = W_k(\bar{m}, \bar{u}_k)$. Аналогично, значение $M[W_k(\bar{m}, \bar{u}_k) \mid \bar{\boldsymbol{\beta}}_{k-1}] = W_k(\bar{a}_{k-1}, \bar{u}_k)$, где вектор $\bar{a}_{k-1} = \{a_{q,\,k-1}\}$ $(q=1, \ldots, d)$, причем, $a_{q,\,k-1} = M(m_q \mid \boldsymbol{\beta}_{q,\,k-1})$. Таким образом, выражение (4) принимает вид

$$\delta_k = P(\bar{\boldsymbol{\beta}}_{k-1}) W_k(\bar{a}_{k-1}, \bar{u}_k), \quad k=2, \ldots, g. \tag{11}$$

Можно показать, что $a_{q,\,k-1} = \hat{\beta}_{qk}{}^*$. Поскольку для нахождения оптимального по критерию R_k управляющего воздействия на k-м шаге требуется минимизировать функцию δ_k, то из (11) следует результат, сформулированный в теореме. Аналогично проводится доказательство для первого шага, так как при линейной функции потерь из (5) следует, что $\delta_1 = W_1(\bar{m}_0, \bar{u}_1)$, где вектор $\bar{m}_0 = \{m_{q0}\}$ $(q=1, \ldots, d)$.

Следствие. *Если выполняются условия теорем 1 и 2, то управляющие воздействия на каждом шаге, полученные исходя из оптимальных прогнозируемых значений случайных параметров операций, являются оптимальными по критерию полного риска.*

4. Примеры. В качестве первого примера рассмотрим общую задачу теории расписаний ([1]), которая заключается в определении оптимальной последовательности обработки n объектов на m машинах. Случайным параметром в данном случае может являться длительность обработки j-го объекта на i-й машине τ_j^i. Управляющее воздействие на k-м шаге $\bar{u}_k$ представ-

дает последовательность обработки объектов на машинах. Функция потерь $W_k = T_k$, где T_k — время обработки на k-м шаге всех объектов на всех машинах. Можно показать, что в данном случае функция δ_k не зависит от матрицы управления $\bar{\mathbf{u}}_{k-1}$. Поэтому на основании теоремы 1, для оптимизации полного риска достаточно на каждом шаге определить управляющие воздействия, оптимизирующие риск на данном шаге R_k. Условия теоремы 2 в этом примере не выполняются, так как величина T_k является нелинейной функцией длительностей выполнения операций τ_{jk}^i.

Другим примером является задача о назначениях, когда случайными величинами являются стоимости выполнения операций ([4]). Обозначим через $c_{ij,k}$ $(i, j = 1, \ldots, n;\ k = 1, \ldots g)$ стоимость выполнения i-й работы j-й машиной, полученную на k-м шаге. Пусть величина $u_{ij,k} = 1$, если i-я работа назначается на j-ю машину на k-м шаге, и $u_{ij,k} = 0$ в противном случае. Управляющее воздействие на k-м шаге $\bar{u}_k = \{u_{ij,k}\}$ $(i, j = 1, \ldots, n)$, а функция потерь $W_k = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij,k} u_{ij,k}$. В данном случае выполняются условия теоремы 2, и оптимальные по критерию R_k управляющие воздействия находятся в результате минимизации функции W_k с заменой величин $c_{ij,k}$ на их оптимальные прогнозируемые значения $\hat{c}^{*}_{ijk}$. Условия теоремы 1 здесь не выполняются, так как из ([4]) следует, что функции δ_k зависит от матрицы управлений $\bar{\mathbf{u}}_{k-1}$. В качестве третьего примера рассмотрим задачу определения оптимальной последовательности обработки n объектов на одной машине, когда длительности выполнения операций являются случайными величинами ([5]). Управляющее воздействие на k-м шаге $\bar{u}_k = \{u_{rk}\}$ $(r = 1, \ldots, n)$, где u_{rk} обозначает номер объекта, обрабатываемого в r-ю очередь на k-м шаге. Функция потерь $W_k = \sum_{j=1}^{n} c_j q_{jk}$, где q_{jk} — момент окончания обработки на машине j-го объекта на k-м шаге, а c_j — весовой коэффициент j-го объекта.

В данном случае, как следует из ([5]), одновременно выполняются условия теорем 1 и 2. Поэтому, на основании сформулированного в п. 3 следствия, последовательности обработки на каждом шаге, оптимальные по критерию полного риска, могут быть получены, исходя из оптимальных прогнозируемых значений длительностей выполнения операций.

Государственный всесоюзный центральный
научно-исследовательский институт
комплексной автоматизации
Москва

Поступило
30 III 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] R. Bellman, J. Soc. Ind. and Appl. Math., 4, № 3 (1956). [2] А. А. Воронов, Исследование операций и управление, М., 1970. [3] А. А. Фельдбаум, Основы теории оптимальных автоматических систем, М., 1966. [4] Л. И. Фейгин, Изв. АН СССР, Техническая кибернетика, № 6 (1970). [5] Л. И. Фейгин, Кибернетика, № 4 (1971).